

УДК 514.182

4-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Д. Ф. Погорелый, С. М. Малинский, В. Г. Усенко

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

просп. Первомайский, 24, г. Полтава, 36011, Украина. E-mail: Valery_Usenko@ukr.net

Инженерная практика указывает на необходимость рассмотрения вопросов динамики оболочек: исследования колебаний и устойчивости. Для решения соответствующих задач проводятся численные эксперименты, анализ результатов которых позволяет строить геометрические модели процессов, протекающих в оболочке с отверстиями. В работе исследовано влияние системы прямоугольных отверстий в оболочке вращения на ее колебания и устойчивость. В расчете колебаний оболочки применен принцип Рэлея, когда когерентное рассеивание колебаний рассматривается без изменения длины волны (упругое рассеивание), а частота рассеиваемых колебаний меньше собственной частоты колебаний объекта. На основании проведенных расчетов получены данные о влиянии прямоугольных отверстий в оболочке на собственную частоту ее колебаний. Для решения задачи на поиск оптимальной формы оболочки, а также количества и размеров отверстий в ней используется многомерная геометрия, которая наглядно показывает связь геометрических параметров и частоты колебаний оболочки.

Ключевые слова: колебания оболочек, геометрическое моделирование.

4-ВИМІРНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ПРЯМОКУТНИМИ ВИРІЗАМИ

Д. Ф. Погорілий, С. М. Малинський, В. Г. Усенко

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

просп. Першотравневий, 24, м. Полтава, 36011, Україна. E-mail: Valery_Usenko@ukr.net

Інженерна практика вказує на необхідність розгляду питань динаміки оболонок: дослідження коливань і стійкості. Для вирішення відповідних задач проводяться чисельні експерименти, аналіз результатів яких дозволяє будувати геометричні моделі процесів, що протікають в оболонці з отворами. У роботі досліджено вплив системи прямокутних отворів в оболонці обертання на її коливання і стійкість. У розрахунку коливань оболонки застосований принцип Релея, коли когерентне розсіювання коливань розглядається без зміни довжини хвилі (пружне розсіювання), а частота розсіюваних коливань менша власної частоти коливань об'єкту. На підставі проведених розрахунків отримано дані про вплив прямокутних отворів у оболонці на власну частоту її коливань. Для вирішення задачі на пошук оптимальної форми оболонки, а також кількості і розмірів отворів в ній використовується багатовимірна геометрія, яка наочно показує зв'язок геометричних параметрів і частоти коливань оболонки.

Ключові слова: коливання оболонок, геометричне моделювання.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Производство, внедрение и непрерывное расширение области применения оболочек вращения создают условия для активизации развития исследований по их методам расчета [1, 5, 7]. Использование оболочек в конструкциях позволяет повысить их надежность и весовую эффективность. Для облегчения конструкции без снижения ее несущей способности целесообразно использовать тонкостенные оболочки. Оболочки часто встречаются в авиационной промышленности и ракетной технике, машиностроении, судостроении, инженерных сооружениях, строительстве, исследованиях подводных шельфов и т.д. Их работа достаточно эффективна в нагруженном состоянии [1, 5]. Рост мощностей и скоростей движения механизмов все больше стимулирует решение задач динамики оболочек: исследование свободных, вынужденных и параметрических колебаний и устойчивости. Для решения этих задач проводятся численные эксперименты, анализ результатов которых позволяет построить геометрические модели процессов, протекающих в оболочке с отверстиями [4, 5]. Проблема надежности оболочек вращения с отверстиями указывает на необходимость повышения точности расчетов. Решение задач о свободных колебаниях тонкостенных оболочек имеет важное значение для исследования вынужденных и параметрических колебаний, динамической потери устойчивости и других, которые используют данные о собственных частотах и формах колебаний.

Цель работы – построение геометрической модели колебаний оболочки вращения с прямоугольными отверстиями, оценка степени влияния геометрических параметров отверстий на собственные частоты и собственные формы колебаний оболочек вращения, а также на горизонтальные перемещения вершины оболочки.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Примем, что $W(x, y, t)$ – амплитуда колебаний оболочки вращения в декартовой системе координат. Кинетическая и потенциальная энергия запишется:

$$\begin{aligned} \dot{O}_i &= \frac{\rho_0 t}{2} \iint_D \left[\frac{\partial W}{\partial t}(x, y, t) \right]^2 dx dy \\ U_i &= \frac{\rho_0 t}{2} \iint_D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial^2 y} - z(I - \nu) \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \right) \right] dx dy, \quad (1) \end{aligned}$$

где x, y, z – прямоугольные декартовы координаты (рис. 1); $\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = z(\rho)$ – исходное уравнение оболочки; ρ_0 – плотность материала; φ_0 – центральный угол выреза; z_1, z_2 – уровень расположения выреза; D – жесткость изгиба оболочки; ν – коэффициент Пуассона; t – время.

Енергія T_2 і U_2 розподіляється на отвори на оболочці. Произведем інтегрування по проекціях отворів оболочкі на горизонтальну площину xOy . По принципу Релея значення потенціальної і кінетическої енергії через собствєнную частоту колеганій ω равняется

$$\omega^2 = \frac{z}{\rho t} \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} w^2(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) d\rho d\varphi}{u}, \quad (2)$$

$w(\rho, \varphi)$ – функцію переменной представляем следующим рядом

$$w(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{\alpha_1 \rho_m}{R} \cdot \sin \frac{\alpha_2 \varphi_n}{2\pi}, \quad (3)$$

где n, m – величина перемещения по осям Ox и Oy соответственно; A_{mn} – амплитуда проекций горизонтальных перемещений; ρ_m – плотность материала оболочки; φ_n – угол разворота отворів; R – радиус основания оболочки.

Амплитуда проекций горизонтальных перемещений вершины оболочки равняется [1]:

$$A_{mn} = \frac{16\omega}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m \cdot n \left(\frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2}{(2\pi)^2} \right)^2}, \quad (4)$$

где R – радиус основания оболочки; ω – частота колебаний; D – жесткость изгиба оболочки; n, m – перемещение вершины оболочки по осям Ox и Oy .

Определим вариацию для $(U_1-U_2)+(T_1-T_2)$ и приравняем амплитуды гармонии. Тогда получим решения теоретических частот и амплитуд колебаний для ряда углов $\varphi_0=20^0; 30^0; 40^0$. Значения ω собственных частот колебаний снижаются по основным волновым формам, которые соответствуют $k=1, n=2$. При этом φ_0 – угол разворота выреза, ω – главная частота колебаний. Аппроксимирующий полином зависимости для числа отворів для $m=6$ запишется:

$$\omega = -0,00003\varphi^5 + 0,0042\varphi^4 - 0,1805\varphi^3 + 2,3342\varphi^2 - 21,092\varphi + 1541,8, \quad (5)$$

для числа отворів $m=5$

$$\omega = -0,00002\varphi^5 + 0,0025\varphi^4 - 0,1009\varphi^3 + 1,2261\varphi^2 - 15,958\varphi + 1540,9, \quad (6)$$

для числа отворів $m=4$

$$\omega = -0,000006\varphi^5 + 0,0008\varphi^4 - 0,0335\varphi^3 + 0,3989\varphi^2 - 12,724\varphi + 1540,3, \quad (7)$$

для числа отворів $m=3$

$$\omega = -0,000001\varphi^5 - 0,00005\varphi^4 + 0,0034\varphi^3 - 0,0142\varphi^2 - 10,369\varphi + 1540. \quad (8)$$

При величине $r\varphi_0 \gg (z_2-z_1)$ значительно снижается амплитуда круговых колебаний, а когда $r\varphi_0 \ll (z_2-z_1)$ снижается вариация балочных функций и уменьшается амплитуда колебаний вершины оболочки A_{xy} .

Наличие прямоугольных отворів снижает значения собственных частот круговых колебаний обо-

лочки. Но с увеличением числа отворів m увеличивается зависимость от угла дуги φ_0 .

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{20}; \quad \frac{l_2}{R} = \frac{1}{20}; \quad Z = \frac{1}{10}H;$$

где H – высота оболочки; R – радиус основания; $Z=Z_2-Z_1$ – высота выреза в оболочке.

Для низких оболочек $\frac{H}{R} < \frac{1}{20}$ частоты балочных форм имеют высокие значения. Поэтому трудно определить влияние отворів на снижение значений собственной частоты, которое составляет от 2 до 3 %. Но для оболочек со значительной высотой это снижение является более существенным (например, при $\frac{H}{R} = 5, m=4$). При изменении числа отворів (например, при $m=3, 4, 6$) меняется форма колебаний.

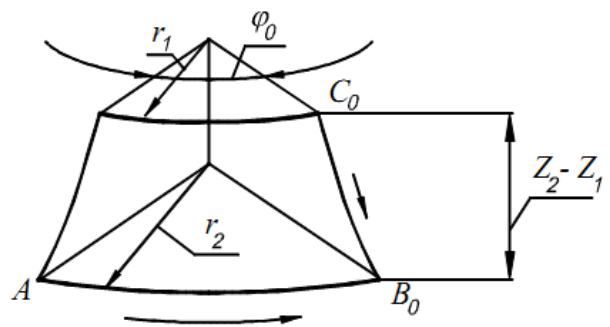


Рисунок 1 – Геометрические параметры прямоугольного отворів оболочки вращения

Согласно трехмерной графической модели зависимости частот балочных колебаний (рис. 2) в оболочке вращения с увеличением числа отворів m происходит нелинейное снижение частот колебаний ω . Аналогичная зависимость наблюдается и при увеличении угла разворота отворів φ . Большее снижение частоты ω достигается при одновременном увеличении числа отворів m и угла φ . Существующий интервал снижения частоты балочных колебаний оболочки вращения при максимальном числе отворів $m_{max}=6$ и при максимальном меридиональном угле дуги $\varphi_{max} = 40^0$ составляет $\Delta\omega [0...32,2 \ %]$.

Так, для оболочки вращения с одним отворием $m = 1$ при меридиональном угле $\varphi = 40^0$ снижение частоты собственных колебаний достигнет $\Delta\omega = 6,3 \ %$. В табл. 1 приведены данные по снижению собственной частоты балочных колебаний оболочки вращения в процентах в зависимости от числа отворів в оболочке вращения.

Таблица 1 – Снижение частот балочных колебаний в процентах

Угол φ	Число отворів					
	1	2	3	4	5	6
10^0	0,06	0,07	0,08	1,0	3,0	5,2
20^0	0,1	0,5	1,7	3,8	7,8	12,6
30^0	1,7	3,6	6,5	10,4	15,9	22,8
40^0	6,3	12,4	18,1	23,4	28,0	32,2

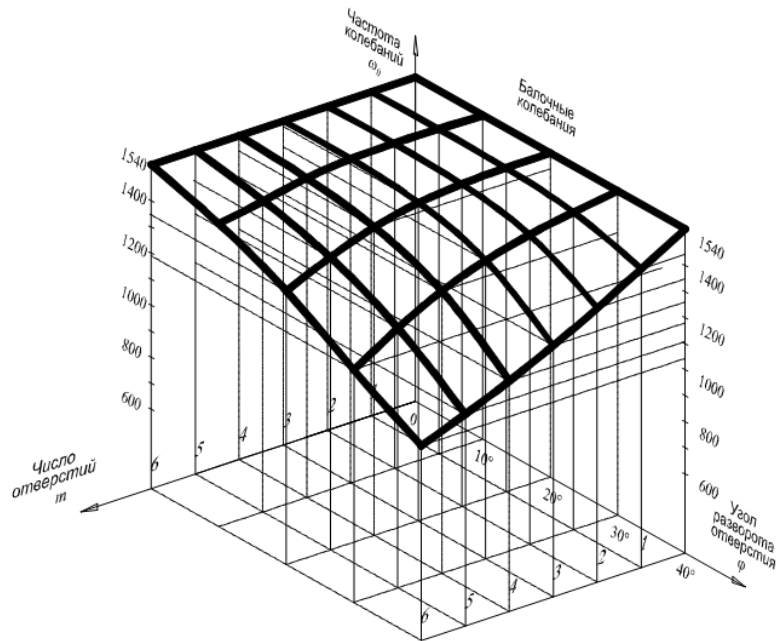


Рисунок 2 – Поверхність залежності власних частот балочних коливань ω_0 від кута дуги φ і числа отворів m

Для кругових коливань в оболочці вращення також происходит снижение собственной частоты с увеличением числа отворов m и меридионального угла дуги отворства φ (рис. 3). Интервал снижения частоты круговых колебаний оболочки вращения

при максимальном числе отворов для данного случая $m_{max} = 7$ и при максимальном меридиональном угле дуги отворства $\varphi_{max} = 40^\circ$ составляет $\Delta\omega [0...62\%]$.

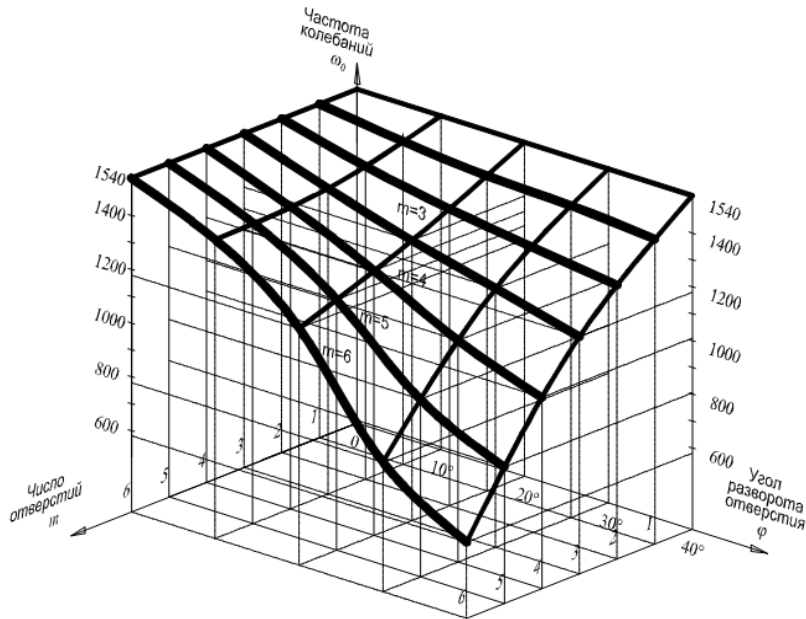


Рисунок 3 – Поверхність залежності частот кругових коливань ω_0 від кута дуги φ і числа отворів m

Например, для оболочки вращения с шестью отворствами $m = 6$ при меридиональном угле дуги отворства $\varphi = 10^\circ$ снижение частоты собственных круговых колебаний достигнет $\Delta\omega=[0...62\%]$. В таблице 2 показано числовые величины снижения собственной частоты круговых колебаний оболочки вращения в процентах в зависимости от числа отворов $m = [1...6]$. Как видно, изменение значений имеет нелинейный характер.

Таблица 2 – Снижение частот круговых колебаний в процентах

Угол φ	Число отворов					
	1	2	3	4	5	6
10°	2,7	5,1	6,9	7,7	8,2	8,4
20°	4,5	8,9	12,9	16,7	20,2	23,4
30°	5,3	11,5	18,2	27,1	37,8	49,5
40°	6,9	14,5	23,4	34,5	47,8	62,0

Число отверстий m и угол разворота отверстия φ нелинейно влияют на амплитуду горизонтальных перемещений A_{xy} вершины оболочки вращения (рис. 4). Максимальное увеличение значения A_{xy} происходит при максимуме числа отверстий m_{max} и максимуме значения угла φ_{max} . Интервал увеличения амплитуды горизонтальных перемещений вершины оболочки вращения при числе отверстий $m_{max} = 6$ и при максимальном меридиональном угле дуги $\varphi_{max} = 40^\circ$ составляет $\Delta\omega [0...208,6 \ %]$. Например, для оболочки вращения с двумя отверстиями $m=2$ при меридиональном угле $\varphi=40^\circ$ снижение частоты собственных колебаний достигнет $\Delta\omega=51,7 \ %$. В таблицу 3 занесены значения увеличения амплитуды гори-

зонтальных перемещений вершины оболочки вращения в зависимости от числа отверстий.

Таблица 3 – Увеличение горизонтальных перемещений A_{xy} вершины оболочки вращения в процентах

Угол φ	Число отверстий					
	1	2	3	4	5	6
10°	0,1	0,5	29,0	117,6	160,8	162,9
20°	0,3	0,5	29,4	118,2	161,8	163,8
30°	29,4	38,7	63,2	151,5	195,6	195,6
40°	44,1	51,7	76,2	164,7	207,4	208,6

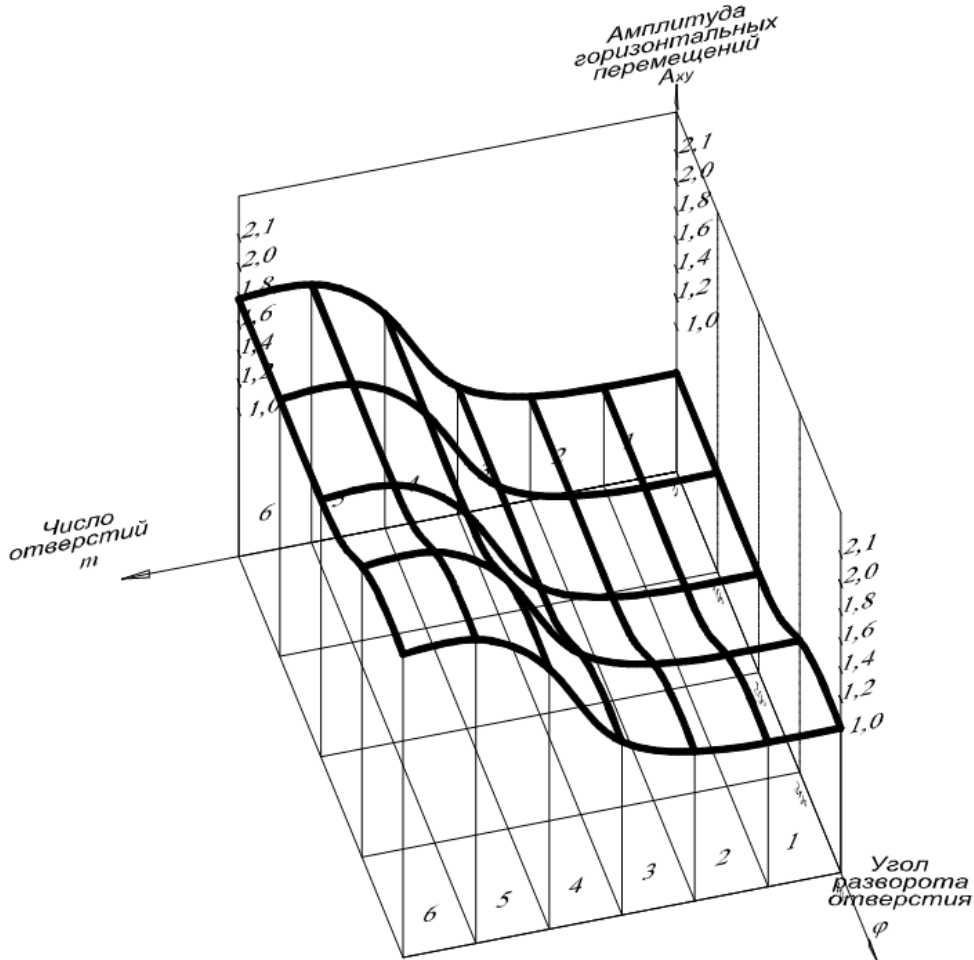


Рисунок 4 – Зависимость амплитуды колебаний A_{xy} от числа отверстий m и угла дуги φ

В евклидовом многомерном пространстве существуют нелинейные подпространства, которые называются многообразиями [2, 3, 4, 6, 8]. Это геометрические модели многопараметрических зависимостей [8, 9, 10]. Геометрическую модель системы n переменных представляет k -многообразие ($1 \leq k \leq n - 1$) n -мерного пространства [8].

В многомерном пространстве существуют такие проявления многообразия в зависимости от величины k : $k=0$ – точка; $k=1$ – пространственная кривая линия; $k=n-1$ – гиперповерхность; $1 < k < n-1$ – обобщенный случай k -многообразия.

Множество линий задает некоторое 2-многообразие в пространстве E^4 . Для отображения линий пересечем 2-многообразие M^2 системой ги-

перплоскостей уровня $x_3=1,2,...g$. Гиперплоскости пересекают 2-многообразие M^2 по кривым линиям. Для некоторых пространств $E^l \in E^n$ и $E^m \in E^n$ с размерностями l и m общим является некоторое пространство E^r , размерность которого равняется [8]:

$$r = l + m - n, \tag{9}$$

где r – размерность пространства. Она, как правило, положительная. Если по уравнению (9) размерность r все же получается отрицательной, то это означает, что рассмотренные пространства E^l и E^m не пересекаются в пространстве E^n . Нулевая размерность соответствует случаю, когда пересечением есть точка.

Пусть нужно определить значение двух параметров, например, A_{xy} – амплитуды горизонтальных перемещений вершины оболочки и ω – частоты собственных колебаний по двум заданным $m=m^*=4$ – числа отверстий и $\varphi=\varphi^*=30^\circ$ – угла разворота отверстия. В общем решение находится с помощью точек пересечения 2-многообразия M^2 двумя гиперплоскостями уровней $m=m^*$ и $\varphi=\varphi^*$ определением параметров A_{xy} и ω .

В графической модели (рис. 5) введем след-проекцию $a-a$ гиперплоскости уровня $m=m^*$, параллельную к оси $O\omega$. Точки $P_{m,\omega}^{(1)}, P_{m,\omega}^{(2)}, \dots, P_{m,\omega}^{(s)}$ находятся на пересечении следа-проекции $a-a$ с каждой из кривых $c_{m,\omega}^{(1)}, c_{m,\omega}^{(2)}, \dots, c_{m,\omega}^{(s)}$ линий 2-многообразия M^2 . По линиям связи, которые параллельны осям $O\omega$ и $O\varphi$, получим проекции точек $P_{\varphi,\omega}^{(1)}, P_{\varphi,\omega}^{(2)}, \dots, P_{\varphi,\omega}^{(s)}$ на проекциях кривых $c_{\varphi,\omega}^{(1)}, c_{\varphi,\omega}^{(2)}, \dots, c_{\varphi,\omega}^{(s)}$ 2-многообразия в плоскости $O\varphi\omega$.

Определим проекцию точки $P_{A_{xy},m}^{(1)}$ в плоскости $O A_{xy} m$ и закончим построение проекции пересечения 2-многообразия M^2 секущей гиперплоскостью $m=m^*$.

Проведем след-проекцию $b-b$ второй гиперплоскости уровня $\varphi=30^\circ$ параллельно оси $Ox\omega$ в плоскости $O\varphi\omega$. На пересечении следа-проекции $b-b$ с проекцией кривой $c_{\varphi,\omega}^{(4)}$ на $O\varphi\omega$ находим проекцию точки пересечения $W_{\varphi,\omega}$. С помощью линий связи определяем проекции этой точки $W_{m,\omega}$ и $W_{A_{xy},m}$ на координатных плоскостях параметров $O\omega$ и $O A_{xy} m$, соответственно, на следе-проекции $a-a$. Значения искомых параметров A_{xy} и ω равняются, соответственно, координатам найденной точки W : $A_{xy}=1,8$, $\omega=1170$.

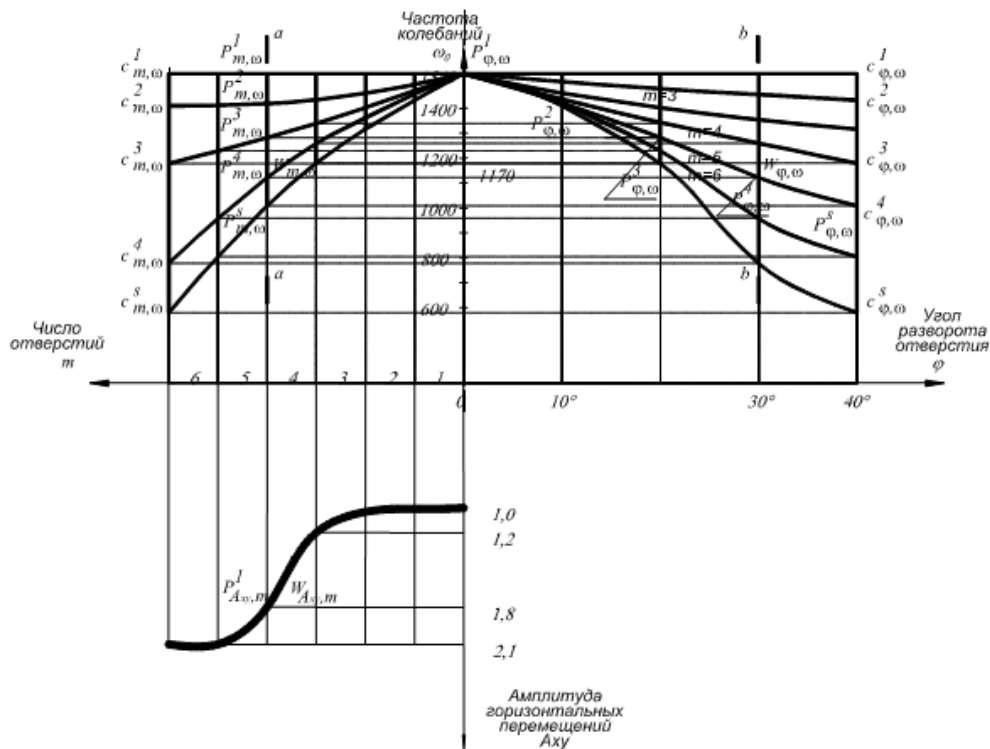


Рисунок 5 – Эпюра 4-параметрической зависимости

ВЫВОДЫ. Представлена 4-мерная геометрическая модель колебаний оболочек вращения с прямоугольными отверстиями. Установлена нелинейная зависимость амплитуды проекций горизонтальных перемещений A_{xy} вершины оболочки вращения от числа отверстий m . При $m=5$ увеличение A_{xy} прекращается. На графической модели 2-многообразия задается множествами линий, поэтому исследование многопараметрической зависимости становится наглядным и достаточно практичным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дихтярь А.С., Ядгаров Д.Я. Форма и несущая способность оболочек покрытий. – Ташкент: "Уктувуци", 1983. – 132 с.

2. Мартин С.С. Фазові траєкторії n-простору станів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип. 18. – С. 35–40.
 3. Мартин С.С. Формування областей параметрів подібних траєкторій фазових просторів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Вип. 4. – Т. 34. – С. 118–124.
 4. Мартин С.С., Гумен О.М. Фазові траєкторії систем з нелінійними траєкторіями руху // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2009. – Вип. 4. – Т. 43. – С.88–92.
 5. Колебания и устойчивость многосвязных тонких систем / Махабарилля Д. Бойд, Р. Бруг. – М.: Мир, 1984. – 311 с.

6. Иванов Г.С. Методы многомерной геометрии в решении прикладных задач // Современные проблемы геометрического моделирования. – Х.: ХДАТОХ, 2007. – С. 33–38.

7. Демпфирование колебаний оболочки при полигармоническом нагружении / Д.Ф. Погорелый, С.М. Малинский, А.Ю. Чернявский, В.А. Бойко // Строительство и техногенная безопасность. – Вып. 48. – Симферополь: НАПКС, 2013. – С. 137–141.

8. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустульга, В.С. Михайленко, І.Н. Бурчак. – К. –

Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.

9. Kodama Akio. A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space / Kodama Akio, Shimizu Satoru. – J. Math. Soc. Jap., 2006, 58, № 3. – PP. 643–663.

10. Some combinatorial results about face-lattices of four-dimensional convex polytopes / Ding Ren, Li Yingzi, Xu Changqing, Yuan Liping. – Rev. roum. math. pures et appl. – 2005. – № 5–6. – PP. 50–56.

4 DIMENSIONAL SHELL ROTATION OSCILLATION MODEL WITH RECTANGULAR CARVES

D. Pogorily, S. Malynski, V. Usenko

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

prosp. Pershotravnevy, 24, Poltava, 36011, Ukraine. E-mail: Valery_Usenko@ukr.net

Purpose. The construction of oscillation geometrical model of a shell with rectangular openings. The influence assessment degree of geometrical parameters of holes on its own frequencies and oscillation forms of rotating shells, as well as on horizontal displacement of the shell vertex. **Methodology.** Methods of geometrical modeling were used. **Results.** The 4-dimensional geometrical model of shells oscillations with rectangular openings was presented. The amplitude nonlinear dependence of horizontal displacement projections of A_{xy} shell rotation vertex on a number of openings m was found. With the achievement of $m=5$ the increase of the amplitude of horizontal vertex displacements stops.

Originality. The engineering practice proves the need to review the shell dynamics, e.g. investigation of oscillations and stability. For solution of a number of problems the analyses which allows to build geometrical processes models that occur in shells with openings is being carried out at this of dispersion moment. The system of rectangular openings influence in the shell of rotation on its oscillation and stability was investigated in this work. In calculation of shell oscillations the Rieley principle was used when coregent dispersion was observed without a change of wave length (dispersion strength) and the frequency dispersion oscillations is less than the frequency of the object.

On received calculations about the data about the influence of rectangular openings on its oscillation frequency was found. The multidimensional geometry shows the bond between geometry parameters (optimal shell form, number and size of openings) and shell oscillation frequency. **Practical value.** On the graphical model (drawing) the 2-variety is defined by a plurality of lines, so the study of the multiparameter dependence becomes convenient, intuitive and practical enough.

Key words: shell vibrations, geometric modeling.

REFERENCES

1. Dickhtar, A.C., Yadgarov, D.Ya. (1983), *Forma i nesuchaya sposobnost obolochek pokryti* [Form and bearing capacity of shell coverings], Uktivuchu, Tashkent, Uzbekistan.

2. Martin, S.E. (2007), "Phase trajectories of n-space states", *Geometrichne ta komp'yuterne modelyuvannya*, vol. 18, pp. 35–40.

3. Martin, S.E. (2007), "Forming areas such perimeters of phase space trajectories", *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*, vol. 4, no. 34, pp. 118–124.

4. Martin, S.E. (2009), "Phase trajectories of nonlinear systems trajectory", *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*, vol. 4, no. 43, pp. 88–92.

5. Mahabiliria, Boid, D., Brug, R. (1984), *Kolebaniya i ustoyichivost mnogosviaznich tonkich system* [Oscillations and stability of multilink thin systems], Mir, Moscow, Russia.

6. Ivanov, G.S. (2007), "Methods of multi-dimensional geometry in solving applied problems", *Sovremennye*

problemy heometrycheskoho modelyuvannya, vol. 10, pp. 33–38.

7. Pogoreliy, D.F. Malinskiy, S.M. Chernyavskiy, A.Y., Boiko, V.A. (2013) "Dempfriration of shell oscillations with polyformic tense", *Building and technogenic safety*, pp. 136–141.

8. Kovalev, C.M., Gumen, M.S., Pusnyulga, S.I., Michailenko, V.E., Burchak, I.N. (2006), *Prikladna geometria i ingenerna grafika* [Applied geometry and engineering graphics. Special sections], Editional issue, department LDTU, Kiev-Lutsk, Ukraine.

9. Akio, K., Satoru, S. (2006), "A group-theoretic characterization of the space obtained by omitting the coordinate hyperplanes from the complex Euclidean space", *J. Math. Soc. Jap.*, no. 3, iss. 56, pp. 643–663.

10. Ding, R., Li, Y., Xu, C., Yuan, L. (2005), "Some combinatorial results about face-lattices of four-dimensional convex polytopes", *Rev. roum. math. pures et appl.*, no. 5–6, pp. 50–56.

Стаття надійшла 23.11.2015.