УДК 517.681.3

ПРО МЕТОДИЧНІ ЗВ'ЯЗКИ КУРСІВ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Ляшенко В.П., Григорова Т.А., Галаган А.І.
Кременчуцький державний політехнічний університет

Вступ. З методичної точки зору будь-який матеріал, що викладається в курсі вищої математики знаходить своє застосування і розширення в професійно орієнтованих курсах. Розглянемо процес послідовності викладання матеріалу, на прикладі застосування методів розв'язку системи лінійних рівнянь в лінійній алгебрі та математичному програмуванні. Найбільш універсальний з них є метод Гауса та його модифікація – метод Жордана-Гауса [1,2]. Цей метод дозволяє знаходити розв'язки системи лінійних рівнянь шляхом перетворень таблиць за допомогою простого алгоритму. Його використовують для розв'язання задач лінійного програмування симплекс методом, де що змінюючи алгоритм методу Жордана-Гауса. Для розв'язання задач лінійної алгебри та математичного програмування, з застосуванням ПЕОМ, можна використовувати відповідний алгоритм в пакеті Mathcad, але на практичних заняттях такі задачі, як правило, розв'язуються біля дошки.

Мета роботи. Представити єдиний методичний підхід до викладення в курсах вищої математики та математичного програмування методів розв'язку систем лінійних рівнянь, зокрема методом Жордана-Гауса. Провести логічний взаємозв'язок методу Жордана-Гауса з симплекс методом. Розглянути алгоритм розв'язку, використовуючи пакет Mathcad. Запропонувати спрощену модифікацію методу Жордана-Гауса в порівнянні з існуючою.

Матеріал і результати дослідження. Розглянемо традиційний підхід і порівняємо його з спрощеним підходом до розв'язання системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса.

Основним методом розв'язку системи лінійних рівнянь є метод Гауса. Він базується на елементарних перетвореннях рівнянь системи [1]. Припустимо, що в системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Тоді визначивши з першого рівняння x_1 виключимо його із всіх рівнянь системи окрім першого. У результаті таких перетворень дістанемо еквівалентну систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \ldots\ldots\ldots a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

Коефіцієнти при невідомих нової системи визначаються за формулами

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{1l}}{a_{11}}a_{1k}; \qquad b'_k = b_k - \frac{b_l}{a_{11}} \cdot a_{1k} \qquad (3)$$

$$(k = 2,\ldots,m;\ l = 2,\ldots,n)$$

На другому кроці повторимо процес виключення, але вже з системою n-1 рівнянь, починаючи з другого. Знову припустимо, що $a'_{22} \neq 0$.

Утворені коефіцієнти розраховуються аналогічно за формулами (3)

$$a''_{kl} = a'_{kl} - \frac{a'_{2l}}{a'_{22}}a'_{2k}; \quad b''_k = b_k - \frac{b'_l}{a'_{22}} \cdot a'_{2k}$$

$$(k = 3,\ldots,m;\ l = 3,\ldots,n) \text{ і т.д.}$$

За скінчене число кроків, що визначається рангом матриці системи, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1r}x_r + d_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{1n}x_{1n} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + d_{2r}x_r + d_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (4)$$

Запропонований алгоритм називається методом Гауса "вниз". В результаті його застосування останнє рівняння системи є рівнянням з одним базовим невідомим. Щоб знайти загальний розв'язок системи рівнянь за методом Гауса, необхідно в системі рівнянь (4) з останнього рівняння визначити

$$x_r = b_r - d_{r,r+1} - \ldots - d_{rn}x_n \qquad (5)$$

і підставити в перші r-1 рівняння. Цим самим ми виключаємо із r-1 рівняння системи невідому x_r. Далі з $(r-1)$-го рівняння знайдемо x_{r-1} і виключимо невідому x_{r-1} з перших $(r-2) - x$ рівнянь і т.д. В результаті отримаємо базовий розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - d_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{1n}x_n \\ x_2 = c_2 - d_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - d_{rn}x_n \end{cases} \qquad (6)$$

Щоб не виконувати перетворення Гауса спочатку в прямому напрямку, виключаючи невідомі під головною діагоналлю, а потім – у зворотному, виключаючи невідомі над нею, здійснюють повне виключення невідомих у стовпці за допомогою модифікованого методу Гауса, який називають методом Жордана-Гауса. Розглянемо суть цього методу.

Коефіцієнти при невідомих системи лінійних рівнянь (1) записують у вигляді таблиці жорданових перетворень.

Таблиця 1 - Таблиця коефіцієнтів жорданових перетворень

x_1	x_2	…	x_n	b_i	$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$
a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1	
a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2	
…	…	…	…	…	
a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m	

Розв'язок системи рівнянь зводиться до перетворення жорданових таблиць. У класичному вигляді перехід від однієї таблиці до другої відбувається за допомогою двох кроків, підчас яких відбувається заміна всіх елементів системи.

1-й крок – серед елементів $a_{ij} \neq 0$ таблиці вибирається розрахунковий елемент. Рядок і стовпець, на перетині яких розташований розрахунковий елемент, називаються *відповідно розрахунковою строчкою* та *стовпцем*. Якщо $a_{11} \neq 0$ то цю дію можна виконувати послідовно починаючи з першого стовпця і першої строчки. Всі елементи розрахункової строчки діляться на розрахунковий елемент. Потім всі інші елементи розрахункового стовпця, окрім розрахункового елемента, заміняються нулями.

2-й крок – усі інші елементи жорданової таблиці обчислюються за правилом прямокутника. Правило прямокутника або заміщення (рис.1) формалізує формули (3) і є їх графічним зображенням. Нехай a_{ij} – розрахунковий елемент. Нам потрібно отримати на місці елементу a_{kl} новий a'_{kl}. Повернемося до формул (3), які визначають коефіцієнти перетвореної системи, і запишемо їх в загальному вигляді для всіх рівнянь системи, наведених в таблиці жорданових перетворень.

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{il}}{a_{ij}}a_{kj}; \qquad b'_k = b_k - \frac{b_l}{a_{ij}} \cdot a_{kj} \qquad (7)$$

Після перетворень і отримання другої таблиці вибирається новий розрахунковий елемент, і відбувається перехід до третьої таблиці і т.д. При цьому двічі в одному рядку і в одному стовпці розрахунковий елемент не вибирається. Жорданові перетворення закінчуються після визначення $min\{m,n\}$ = rank$B$ розрахункових елементів, де B розширена матриця системи (1). В кінці всіх перетворень ми отримуємо розв'язок, або бачимо що система несумісна.

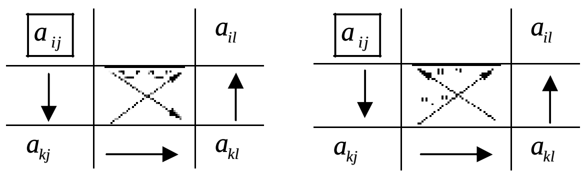
Пропонується інша модифікація методу Жордана-Гауса, яка спрощує метод жорданових виключень, особливо під час розрахунків біля дошки в аудиторії, за рахунок виключення ділення на розрахунковий елемент. При цьому кроки перетворень майже не відрізняються від попередніх:

1-й крок – вибирається розрахунковий елемент. Усі елементи розрахункового рядка залишаються без зміни. Всі елементи розрахункового стовпчика заміщуються нулями.

2-й крок – заміщуються всі інші елементи таблиці за правилом прямокутника.

$$a'_{kl} = a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il}; \quad b_k = b_l \cdot a_{ij} - a_{kj} \cdot a_{il} \qquad (8)$$

В кінці всіх перетворень для знаходження невідомих потрібно виконати ще один крок. Необхідно поділити стовпчик вільних елементів на відповідні коефіцієнти при базових змінних в кожному рядку. Після цього ми отримаємо розв'язок системи.



1-й метод 2-й метод

Рисунок 1 - Розрахунки за правилом прямокутника

Для перевірки правильності розрахунків до таблиці жорданових перетворень додається ще один стовпчик, елементи якого дорівнюють сумі елементів відповідного рядка. Цей елемент $\tilde{b}_i$ використовується для перевірки правильності обчислень на кожному кроці. Якщо сума елементів рядка співпала з розрахунковим значенням $\tilde{b}_i$, то це означає, що серед нових елементів a'_{ij} b'_i помилково обчислених немає.

Розглянемо застосування методу Жордана-Гауса для розв'язання задачі лінійного програмування симплекс методом [3]. Задача лінійного програмування в канонічній формі має вигляд

$$(\min, \max)\ F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (9)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{K} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{K} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \mathbf{KKKKKKKKKKKKK} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \mathbf{K} + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (10)$$

$$x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$

тут рівність (9) – цільова функція, а (10) система обмежень цільової функції (9).

Особливістю розв’язання задачі лінійного програмування симплекс методом, в порівнянні з розв’язком системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса, полягає у відмінності вибору розрахункового елемента. Обчислення та перетворення відбуваються за схемою жорданових перетворень (7) в таблицях. Розрахунковий елемент вибирається в залежності від характеру екстремуму задачі із умови

$$\left\{ \min \frac{b_i}{a_{ij}}, a_{ij} > 0, \max\left|c_j\right| \right\} \text{ залежно від знака } c_j .$$

Процес розв’язання задачі симплекс-методом носить ітераційний характер. Однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з’ясовано, що його не існує. Дані для обчислень записуються в симплекс таблицю [3].

Останній рядок симплекс таблиці заповнюють значеннями оцінок цільової функції: $\Delta_j = F(x_j) - c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Перехід від однієї таблиці до іншої відбувається шляхом жорданових перетворень отриманої таблиці. Ці перетворення дозволяють переходити від одного допустимого плану задачі ЛП до іншого. Одночасно відбуваються перетворення цільової функції. Під час переходу від одного плану до іншого відбуваються вилучення з бази одних невідомих та включення інших.

```
MG:= | r ← 0
     | for i ∈ 0..n − 1
     |   | c ← 0
     |   | for j ∈ 0..m − 1
     |   |   | MG(c,r) ← M(c,r)
     |   |   |
     |   |   |                     M(c,k)·M(s,r)
     |   |   | MG(c,r) ← M(c,r) − ─────────────   if c ≠ s
     |   |   |                        M(s,k)
     |   |   |
     |   |   |            M(c,r)
     |   |   | MG(c,r) ← ──────   if c = s
     |   |   |            M(s,k)
     |   |   |
     |   |   | c ← c + 1
     |   | r ← r + 1
     | MG
```

При розв’язанні задачі ЛП за формулами (8) оптимальне значення цільової функції буде дорівнювати частці від ділення $F(x_j)$ на коефіцієнт при базовій змінній, яка першою піддавалася перетворенню.

Для перевірки розрахунків, а також для їх виконання можна скористатися алгоритмом і пакетом Mathcad. Для покрокових розрахунків класичного методу Жордана-Гауса пропонуємо алгоритм

$$n := \mathrm{cols}(M) \qquad\qquad m := \mathrm{rows}(M)$$

Де M – жорданова таблиця, яка має n- кількість стовпців та m – кількість рядків.

Для розв’язку системи лінійних рівнянь другим способом можна скористатися наступним алгоритмом

$$n := \mathrm{cols}(M) \qquad\qquad m := \mathrm{rows}(M)$$

Де M – жорданова таблиця, яка має n- кількість стовпців та m – кількість рядків.

Розглянемо приклад, що ілюструє обидва методи. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса, використовуючи два підходи.

```
MG:= | r ← 0
     | for i ∈ 0..n − 1
     |   | c ← 0
     |   | for j ∈ 0..m − 1
     |   |   | MG(c,r) ← M(c,r)
     |   |   | MG(c,r) ← M(c,r)·M(s,k) − M(c,k)·M(s,r)  if c ≠ s
     |   |   | c ← c + 1
     |   | r ← r + 1
     | MG
```

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Після трьох кроків жорданових перетворень отримали відповідь

Розв’язок 1-им методом Розв’язок 2-им методом

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 520x_1 = 1560 \\ 260x_2 = -1300 \\ -52x_3 = -104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Розрахунки наведені в таблицях (2) і (3).

Розглянемо задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 12 \end{cases}$$

Розглянемо розв’язок задачі симплекс методом. Запишемо всі дані для обчислень в симплекс таблицю. Таблиця 4 – за формулами (7), таблиця 5 – за

формулами (8)
Для першого і для другого методів вибираємо розрахунковий елемент. Виконуємо розрахунки методом Жордана-Гауса відносно знайденого розрахункового елементу.

Таблиця 2 - Розв'язок системи лінійних рівнянь з застосуванням формул (7)

x_1	x_2	x_3	b_i	$\tilde{b}_i$
$\boxed{2}$	1	-3	-5	-5
1	-2	2	17	18
1	1	3	4	9
2	1	-3	-5	-5
$\boxed{0}$	-5	7	39	41
0	1	9	13	23
-10	0	8	-14	-16
0	-5	7	39	41
$\boxed{0}$	0	-52	-104	-156
520	0	0	1560	2080
0	260	0	-1300	-1040
0	0	-52	-104	-156

Таблиця 3 - Розв'язок системи лінійних рівнянь з застосуванням формул (8)

x_1	x_2	x_3	b_i	$\tilde{b}_i$
$\boxed{2}$	1	-3	-5	-5
1	-2	2	17	18
1	1	3	4	9
1	0,5	-1,5	-2,5	-2,5
$\boxed{0}$	-2,5	3,5	19,5	20,5
0	0,5	4,5	6,5	11,5
1	0	-0,8	1,4	1,6
0	1	-1,4	-7,8	-8,2
0	0	5,2	10,4	15,6
1	0	0	3	4
0	1	0	-5	-4
0	0	1	2	3

За два кроки обома методами отримано оптимальний план задачі.
Розрахунки наведені в таблицях (4) і (5).

Таблиця 4 - Розрахунки виконані з застосуванням формул (7)

База	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$
	1	2	1	0	8	12
	3	5	0	1	15	24
	6	1	0	-1	12	18
	-5	-2	6	0	0	-1
	0	1,8333	1	0,1667	6	9
$\boxed{x_1}$	0	4,5	0	1,5	9	15
	1	0,1667	0	-0,1667	2	3
	0	-1,1667	6	-0,8333	10	14
	0	1,3333	1	0	5	7,3333
x_1	0	3	0	1	6	10
x_4	1	0,6667	0	0	3	4,6667
	0	1,3333	6	0	15	22,3333

Таблиця 5 - Розрахунки виконані з застосуванням формул (8)

База	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$
	1	2	1	0	8	12
	3	5	0	1	15	24
	6	1	0	-1	12	18
	-5	-2	6	0	0	-1
	0	11	6	1	36	54
$\boxed{x_1}$	0	27	0	9	54	90
	6	1	0	-1	12	18
	0	-7	36	-5	60	84
	0	72	54	0	270	396
x_1	0	27	0	9	54	90
x_4	54	36	0	0	162	252
	0	72	324	0	810	1206

Для того, щоб отримати розв'язок (таблиця 5) поділимо вільні коефіцієнти на коефіцієнти при змінних, в результаті одержимо $54x_1 = 162$; $x_1 = 3$; $9x_4 = 54$; $x_4 = 6$; $F = 810/54 = 15$, який співпадає з першим рішенням.

Одночасно знайдено розв'язок за запропонованими алгоритмами у пакеті Mathcad.

Висновки. Ця стаття демонструє логічний зв'язок між різними розділами математики. Викладач, звертаючи увагу на нього, допомагає студенту глибше осмислити викладений матеріал, а головне - навчає студента застосовувати раніше одержані знання. Висвітлення матеріалу з різних точок зору, надає студентам можливість застосування різних методів, встановлюючи логічний зв'язок з раніше викладеним та приводить до більш глибокого розуміння і осмислення вивченого матеріалу.

Модифікований метод, як показано на прикладі, дозволяє спростити обчислення, що дає можливість викладачу витрачати менше часу на виконання розрахунків біля дошки, а студентам швидше обраховувати і осмислювати викладений матеріал.

Представлений в статті покроковий алгоритм розв'язку системи лінійних рівнянь в пакеті Mathcad демонструє, можливість реалізації розглянутих методів використовуючи комп'ютерну техніку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: «Наука», 1971. – 431 с., с ил.
2. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М., Обухова Л.В., Середа Щ.Г., Головко Н.В. Вища математика у прикладах та задачах. – Харків: «Фактор-Друк», 2002. – 389 с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волошенко А.Б. Математическое программирование. – М.: «Высшая школа», 1980. – 304 с., с ил.

Стаття надійшла 141.09.2006 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Чорний О.П.