

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ В ОПОРАХ

Григорьев А.Л.

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"

Король С.А., Дерябенко А.И.

Кременчугский государственный политехнический университет

Введение. Трение в опорах стальной пружины сжатия, наравне с внутренним и внешним трением о среду, оказывает существенное влияние на колебательный процесс всей пружины [1,2]. В публикации [3] была построена математическая модель пружины адекватная реальным условиям закрепления пружины в механизме.

Цель исследования. Получить аналитическое или численно-аналитическое решение для математической модели пружины. Реализовать построенный алгоритм в программном комплексе и получить возможность сравнить результаты вычислений с экспериментальными.

Уточнение граничных условий. В работе [1] в результате проведения экспериментального исследования стальной цилиндрической пружины сжатия, опирающейся на подогнутый торцевой виток, было выявлено существенное влияние сухого трения в опорах на демпфирование её колебаний. Декремент затухания колебаний, связанный с этим видом трения, зависит от амплитуды колебаний, и при высокой амплитуде колебаний исследуемой форсуночной пружины он составил 0.03 ... 0.04, что примерно соответствовало вкладу внутреннего гистерезисного трения. Ранее на необходимость учёта сухого трения в опорах пружины указывалось в монографии [2].

При моделировании граничных условий для пружин такого типа в [3] получено матричное соотношение

$$\begin{matrix} \overset{\Gamma}{\underset{\text{Л}}{\text{И}}} \overset{\text{Ш}}{\text{Ш}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \\ \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \\ \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \\ \overset{\text{Л}}{\text{Л}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{Л}}{\text{Л}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \end{matrix} \begin{matrix} \overset{\text{А}}{\text{А}}_{11} \\ \overset{\text{А}}{\text{А}}_{12} \\ \overset{\text{А}}{\text{А}}_{21} \\ \overset{\text{А}}{\text{А}}_{22} \end{matrix} \begin{matrix} \overset{\text{Ш}}{\text{Ш}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \\ \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \\ \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{К}}{\text{К}} \\ \overset{\text{Б}}{\text{Б}} \overset{\text{Л}}{\text{Л}} \overset{\text{Б}}{\text{Л}} \overset{\text{Б}}{\text{Л}} \end{matrix} \overset{\Gamma}{\underset{\text{И}}{\text{Ю}}} \overset{\text{Ш}}{\text{Ш}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \overset{\text{Ш}}{\text{И}} \quad (1)$$

где $\overset{\text{I}}{x}$ - вектор обобщённых координат сечения (рис.1), составленный из продольного перемещения $x_1 : n$ и углов изгиба и кручения $x_2 : a, x_3 : g$; вектор $\overset{\Gamma}{y}$ объединяет группу обобщённых координат, отвечающую поперечным колебаниям пружины ($y_1 : b$ - угол качания, $y_2 : u$ - радиальное, $y_3 : w$ - тангенциальное перемещение сечения);

$A = \overset{\text{И}}{\text{И}} \overset{\text{Ш}}{\text{Ш}} \overset{\text{И}}{\text{И}}$ - матрица податливости с квадратными блоками $A_{ij}; i, j = 1, 2$; $\overset{\Gamma}{q}$ - вектор обобщённых сил, компоненты которого пропорциональны перерезывающей силе, моментам изгиба и кручения; вектор обобщённых сил $\overset{\Gamma}{f}$ отвечает группе поперечных колебаний.

Далее в [3] было принято, что в точках контакта

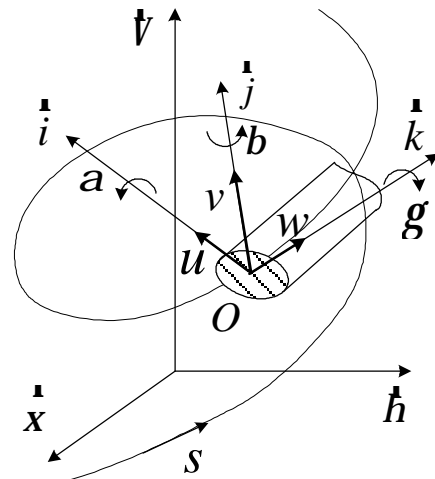


Рисунок 1 - Координаты сечения

движущегося и опорного витков имеет место качение цилиндрических поверхностей, а опорная тарелка (или шайба) пружины перемещается в плоскости, перпендикулярной оси пружины, без сопротивления. Ясно, что такие допущения идеализируют реальную картину, и поэтому соответствующее граничное условие

$$\overset{\Gamma}{x} + A_{11} \overset{\Gamma}{q} = 0 \quad (2)$$

в [1] было названо идеальным. В действительности при существенной амплитуде колебаний вместо качения поверхностей наблюдается скольжение, что требует учёта трения (рис. 2). Сила трения q_{mp1} создаёт одинаковые моменты по кручению и изгибу. В результате граничное условие (2) приобретает иной вид:

$$\overset{\Gamma}{x} + A_{11} \overset{\Gamma}{q} - \overset{\Gamma}{q}_{mp} = 0, \quad (3)$$

$$\text{где } \overset{\Gamma}{q}_{mp} = c \text{ Ч} N_1 / c \text{ Ч} \text{ign}(\dot{\phi}) \text{ Ч} (0 \ 1 \ 1)^T \quad (4)$$

соответственно $N_1 \gg 0.5q_1$ - прижимающая сила; c - коэффициент сухого трения; c - индекс пружины.

При выводе формулы (4) было принято, что изменение знака угловой скорости $\dot{\phi}$ совпадает с достижением экстремума перерезывающей силы ϕ , действующей в крайнем рабочем сечении пружины.

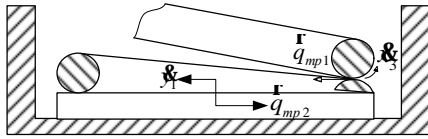


Рисунок 2 - Силы и моменты сил, возникающие в опорном витке

Кроме того, между тарелкой пружины и корпусом действует трение, направление которого противоположно движению опоры. Результаты, полученные в [3], позволяют определить направление перемещения опоры. Используя матричное уравнение при значении $f \gg 0$, получаем $\dot{x} \gg -A_{21} \dot{y}$.

Анализ этого соотношения показывает, что перерезывающая сила не оказывает влияния на поперечные деформации, кроме того $y_3 \gg 0$.

Следовательно, опора перемещается в радиальном направлении и поворачивается вокруг оси, проходящей через точку контакта K_1 (рис. 3). Среднее плечо силы трения для остальных контактных точек приближённо равно R , а суммарная реакция $N_2 \gg 0.5 \dot{y}_1$.

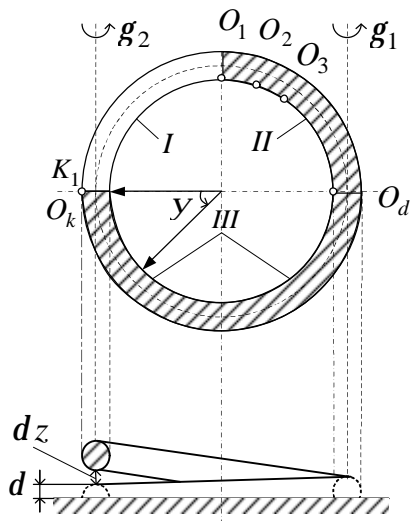


Рисунок 3. Схема опорного витка (I-"висящая", II-"падающая", III-"лежащая" части; шлифованная часть заштрихована)

В результате получена приближённая формула для соответствующей силы и момента сил трения:

$$f_{mp}^r = f \dot{y}_1 \dot{y}_1 \text{sign}(\dot{y}_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (5)$$

Подстановка (5) вместо вектора f в уравнение $\dot{x}^r + A_{11} \dot{y}^r + A_{12} \dot{y}^r = 0$ приводит к новому граничному условию:

$$\dot{x}^r + A_{11} \dot{y}^r = -A_{12} \dot{y}_1 \dot{y}_1 \text{sign}(\dot{y}_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (6)$$

Объединяя результаты (3) и (6), получаем:

$$\dot{x} + A_{11} \dot{y} = \dot{x}_{mp}(t), \quad (7)$$

$$\dot{x}_{mp}^r = f q_1 \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}^{-1} \dot{y}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T - A_{12} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{B} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Порядок учёта трения. Таким образом, влияние сухого трения удалось свести к учёту некоторого дополнительного (условного) движения опоры. Это движение включает в себя перемещение по трём координатам и его "направление" в пространстве продольных координат x_1, x_2, x_3 определяется вектором

$$\dot{v}^r = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}^{-1} \dot{y}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T - A_{12} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{II} \\ \text{III} \\ \text{B} \end{pmatrix} \quad (9)$$

При скольжении поверхностей величина c постоянна ($c = c_{mp}$), величина $q_1 \gg const$, поэтому $\dot{x}_{mp}^r \gg const$. В результате график изменения \dot{x} после учета трения начинает "отставать" от прежнего графика \dot{x}_0 (без учета трения), причем он отстает на

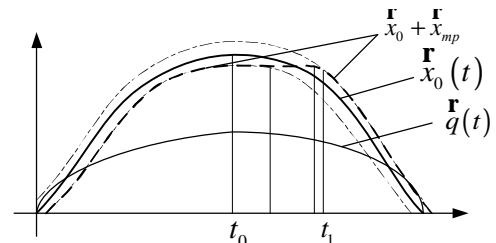


Рисунок 4 - График перемещения без учета и с учетом силы трения

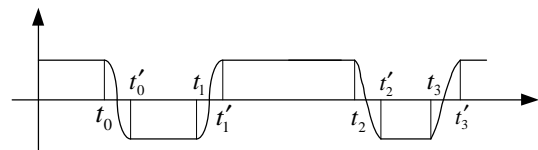


Рисунок 5 - График силы трения

одинаковую величину, но в разные стороны (рис.4). График $\dot{x}_{mp}(t)$ имеет, в основном, вид кусочно-постоянной линии, отдельные "полочки" которой соединены переходными участками (рис.5).

Заметим, что на переходных участках (t_n, t_{n+1}) коэффициент трения $f < f_{mp}$ и сила трения определяется условием отсутствия скольжения трущихся поверхностей, т.е. перемещение практически постоянно. Кроме того, длина этих участков, как правило, не велика, и поэтому условие $\dot{x} \gg const$ эквивалентно такому:

$$\dot{x}_{mp}^r(t) = A_{11} \dot{y}_1 \dot{y}_1 \text{sign}(\dot{y}_1) = const \quad (10)$$

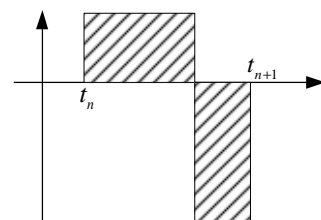


Рисунок 6. График ускорения

где в момент времени t_n : $q_1(t_n) = 0$ и $\dot{x}_{mp}(t_n) = 0$.
Условие (10) выполняется на большей части переходного участка, но в конце этого участка знак ускорения меняется на противоположный (рис.6). Амплитуды ускорений выбираются так, что к концу переходного участка производная $\dot{x}_{mp}(t) = 0$.

Алгоритм решения задачи проиллюстрирован на рис.7, где дополнительные перемещения и силы находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \overset{r}{x}_o(t, q) &= x_{mp}(t) \Psi_{h_{mp}}(q) + \overset{r}{x}_{mp}(t) \Psi_{w_{mp}}(q) + \\ &+ T_0 \overset{r}{K}_{x_{mp}}(t-t, q) d\overset{r}{x}_{mp}(t); \\ \overset{r}{q}_o(t, q) &= z \Psi_{h_{mp}}(t) \Psi_{h_{mp}}(q) + \frac{m}{3} \Psi_{w_{mp}}(t) \Psi_{w_{mp}}(q) + \\ &+ T_0 \overset{r}{K}_{q_{mp}}(t-t, q) d\overset{r}{q}_{mp}(t) \end{aligned}$$



Рисунок 7 - Блок-схема алгоритма корректировки решения с учетом трения в опорах

$x_{mp} = f \Psi_{h_1} \text{Sign}(\dot{x}_{mp})$, а статические, квазистатические и динамические ядра, используемые в этих формулах, получаются в результате взвешенного суммирования ядер, отвечающих отдельным видам движения опоры:

$$\begin{aligned} x_{h_{mp}} &= (x_{1h_{mp}} \quad x_{2h_{mp}} \quad x_{3h_{mp}}) \Psi^r, \\ q_{h_{mp}} &= (q_{1h_{mp}} \quad q_{2h_{mp}} \quad q_{3h_{mp}}) \Psi^r, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Данные ядра, как и все другие ядра разработанного метода, вычисляются в начале работы программы, а используются многократно. Кроме того,

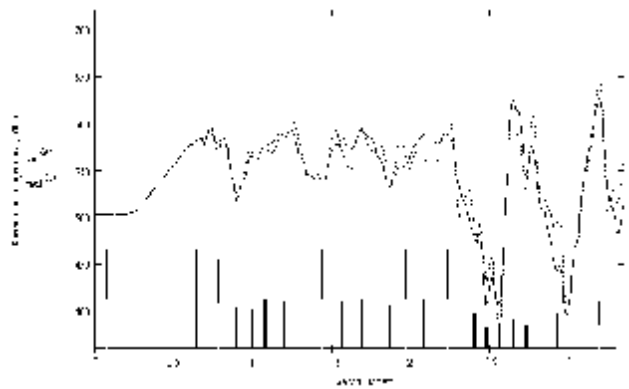


Рисунок 8 - Влияние сухого трения на расчетные касательные Напряжения у неподвижной опоры пружины форсунки дизеля ЯМЗ-238 (столбиками отмечены моменты переключения силы трения)

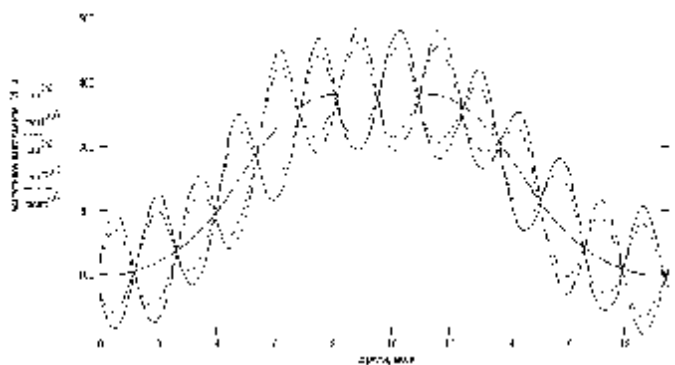


Рисунок 9 - Влияние сухого трения на расчетные касательные напряжения у подвижной(6) и неподвижной(0) опор плунжерной пружины ТН дизеля СМД-31

при расчёте установившихся колебаний моделирование одного цикла деформации также приходится выполнять многократно. Результат применения метода для расчёта пружины форсунки (установившиеся колебания) и пружины плунжера (установившиеся колебания) показаны на рис. 8, 9.

Выводы. Построенный численно-аналитический алгоритм, основанный на вычислении ядра интегрального преобразования и дальнейшего численного сворачивания его с законом перемещения опоры, позволяет свести влияние сухого трения к учёту некоторого дополнительного движения опоры.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Григорьев А.Л., Король С.А., Дериенко А.И. Экспериментальное и расчётное исследование колебаний витков пружины дизельной форсунки // Вісник НТУ "ХПІ". - Харків, 2005.- № 37.- С.159-168.
2. Хвингия М.В. Вибрация пружин.- М.: Машиностроение, 1969.
3. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Моделирование граничных условий при анализе колебаний пружины со шлифованным торцом // Вісник КДПУ. - Кременчук, 2005.- Вип. №1(30).- С.45-52.

Статья поступила 14.06.06
Рекомендовано к печати д.т.н. Драгобецким В.В.