УДК 519.21

ОПТИМАЛЬНЕ СТОХАСТИЧНЕ КЕРУВАННЯ В СХЕМІ СЕРІЙ ІМПУЛЬСНИМ ПРОЦЕСОМ ПЕРЕНОСУ З ЛІНІЙНОЮ ВІДНОСНО КЕРУВАННЯ ШВИДКІСТЮ

Гончарова С.Я., к.ф.-м.н., ст. викл.
Кіровоградський національний технічний університет
м. Кіровоград, просп. Університетський, 8
E-mail: goncharov@kw.ukrtel.net

Исследуется оптимальное стохастическое управление импульсным процессом переноса с линейной относительно управления скоростью переноса в схемах усреднения и диффузной аппроксимации при выполнении условия баланса.

Ключевые слова: импульсный процесс переноса, оптимальное стохастическое управление, усредненный процесс, диффузный процесс.

The optimal stochastic control for the impulse process of transfer with line velocity of transfer by control in schemes of averaging and diffusion approximation under balance condition is investigated.

Key words: impulse process of transfer, optimal stochastic control, averaging process, diffusion process.

Вступ. При побудові математичних моделей реальних стохастичних систем прагнення до адекватного опису еволюції системи приводить до складних задач, аналіз яких неможливий. Ефективним апаратом спрощеного опису таких систем є усереднення впливу випадкових чинників середовища.

Фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами залежно від волі людини. В зв'язку з цим виникає задача оптимальної стабілізації керованих систем.

Аналіз попередніх досліджень. У роботах [1, 2] розв'язана проблема оптимального стохастичного керування в схемах усереднення та дифузійної апроксимації при виконанні умови балансу, відповідно, напівмарковськими процесами ризику, які є імпульсними процесами переносу в напівмарковському випадковому середовищі. Імпульсні процеси переносу або процеси накопичення є реалізацією напівмарковських випадкових еволюцій і мають широке застосування як природні абстрактні моделі реальних процесів, що протікають під впливом випадкових чинників зовнішнього середовища.

Мета роботи. Розширення кола теоретичних і практичних застосувань теорії стохастичного керування еволюційними стохастичними системами і випадковими еволюціями.

Матеріал і результати досліджень. Базуючись на отриманих в [1, 2] результатах, у даній роботі досліджується оптимальне стохастичне керування імпульсним процесом переносу з лінійною відносно керування швидкістю переносу при квадратичному критерії якості в схемах усереднення та дифузійної апроксимації при виконанні умови балансу. Нехай (Ω, F, P) імовірнісний простір, на якому розглядатимемо випадкові величини зі значеннями у вимірному просторі (X, X).

Як математичну модель зовнішнього середовища розглядатимемо напівмарковські процеси.

Означення 1. Напівмарковським процесом називається процес $x(t)$, що задається співвідношеннями:

$$x(t) = x_{n(t)}, \tag{1}$$

$$n(t) = \max\{n: t_n \le t\},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} q_k,\ n \ge 0,\ t_0 = 0, \tag{2}$$

де t_n – моменти відновлення,

q_k – невід'ємні випадкові величини, що задають інтервали між моментами відновлення.

Розглядатимемо регулярний напівмарковський процес:

$$\mathrm{P}\{n(t) < +\infty\} = 1,\quad \forall t \in R_+ .$$

Означення 2. Керований імпульсний процес переносу $z^e(t)$ у просторі станів $(R_+, \mathrm{B}(R_+))$ у напівмарковському випадковому середовищі $x(t/e)$ задається інтегральним рівнянням

$$z^e(t) = z + \int_0^t u(z^e(s), x(s/e), u^e)ds - e\sum_{k=1}^{n(t/e)} a(x_k), \tag{3}$$

де $e > 0$ малий параметр,

$0 < z < \infty$ – початковий параметр;

$a(x)$ – невід'ємна, вимірна, обмежена на X функція;

керування $u^e \in U$, такі, що

$$u^e = u^e(z^e(t), x(t/e), g(t/e));$$

$g(t/e) = t/e - t_{n(t/e)}$ – дефект-процес;

U – компактна множина допустимих керувань (кожному допустимому керуванню відповідає процес $z^e(t)$, що є єдиним розв'язком рівняння (3)) у просторі дійсних неперервних функцій на $R_+ \times X \times R_+$, для яких виконується умова Ліпшица по z, і

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^e(z, x, t) = \hat{u}(z),\ \forall (z, x, t) \in R_+ \times X \times R_+;\ \hat{u} \in U \ ; \quad (4)$$

функція $u(z, x, u(z, x, t))$ безперервна; безперервно диференційовна по z, обмежена по x, невід'ємна і така, що

$$u(0, x, u(0, x, t)) = 0\ ,\ \forall x \in X,\ \ t \in R_+,$$

$$0 \le u'_z \le K,\ \ K > 0\ .$$

Усереднений процес [3], що відповідає керуванню $\hat{u}$, визначеному в (4), і є слабкою межею в просторі Скорохода $D_R[0, +\infty)$ при $e \to 0$ процесу $z^e(t)$, визначеного в (3), задається розв'язком рівняння:

$$\hat{z}(t) = z + \int_0^t \hat{a}(\hat{z}(s), \hat{u})ds - \hat{a} \cdot t\ , \qquad (5)$$

де

$$\hat{a}(z, u) = \int_X p(dx) u(z, x, u)\ , \qquad (6)$$

$$\hat{a} = \int_X r(dx) \frac{a(x)}{m}\ , \qquad (7)$$

$$m = \int_X r(dx) m_1(x)\ ,$$

$$m_1(x) = \int_0^\infty t\, G_x(dt)\ ,$$

$$p(dx) = r(dx) \frac{m_1(x)}{m}\ ,$$

$r(dx)$ – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $(x_n; n \ge 0)$,

$G_x(t)$ – функція розподілу по t при фіксованому x часу перебування в станах двокомпонентного ланцюга Маркова $(x_n, t_n; n \ge 0)$.

Введемо позначення:

$$\hat{L}_u f(z) = (\hat{a}(z, u) - \hat{a}) \frac{d}{dz} f(z),\ \ \forall f(z) \in C^1(R_+) \quad (8)$$

– інфінітезимальний оператор усередненого процесу $\hat{z}(t)$ в (5), що відповідає керуванню u, де функція $\hat{a}(z, u)$ та константа $\hat{a}$ визначені відповідно в (6), (7).

Визначимо функціонал критерію якості для усередненого процесу $\hat{z}(t)$ в (5):

$$\hat{G}_z^0(\hat{u}) = \int_0^\infty \hat{K}(\hat{z}(s), \hat{u}(\hat{z}(s)))ds\ , \qquad (9)$$

де функція $\hat{K}(z, u)$ – безперервна і невід'ємна.

Тоді введемо сім'ю функцій $K^e(z, x, t, u)$ таких, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K^e(z, u, x, t) = \hat{K}(z, u)\ ,$$

і розглядатимемо задачу оптимальної стабілізації імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (3), у розумінні критерію якості

$$G_{z,x}^e(u^e) =$$

$$= \int_0^\infty E_{z,x} K^e(z^e(t), x(t/e), u^e(z^e(t), x(t/e), g(t/e)))dt \quad (10)$$

Теорема 1 [1]. Нехай існує невід'ємна функція $\hat{V}_0(z) \in C^2(R_+)$, що задовольняє умовам

$$\lim_{z \to \infty} V(z) = +\infty\ ,$$

$$V(z)\ – \textit{поліноміальна і}$$

$$V(z) = 0 \Leftrightarrow\ z = 0\ ;$$

$[\hat{a}(z) - \hat{a}] V'_z(z) \le -b\, V(z)$ для деякого $b > 0$ і скінченного початкового параметра $z \in R_+$,

$$\textit{де}\ \hat{a}(z) \ne \hat{a}\ ,$$

та керування $\hat{u}_0(z) \in U$ такі, що задовольняють при $z \in R_+$, $\hat{u} \in U$ наступним умовам:

$$\hat{L}_{\hat{u}_0} \hat{V}_0(z) + \hat{K}(z, \hat{u}_0) = 0\ ,$$

$$\hat{L}_{\hat{u}} \hat{V}_0(z) + \hat{K}(z, \hat{u}) \ge 0\ ,$$

де оператор $\hat{L}_u$ визначений в (8).

Тоді функція $\hat{u}_0(z)$ розв'язує задачу про оптимальну стабілізацію імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (3), в схемі критерію якості $G_{z,x}^e(u^e)$ в (10) для достатньо малого та фіксованого $e > 0$, причому

$$\lim_{e \to 0} G_{z,x}^e(u^e) = \hat{G}_z^0(\hat{u}_0) = \hat{V}_0(z)\ ,$$

де $\hat{G}_z^0(\hat{u}_0)$ визначений в (9).

Візьмемо в якості оптимальної функції Ляпунова функцію

$$\hat{V}_0(z) = z^2 ,$$

де z – скінченний параметр,
та розглянемо таку модель усередненого процесу, визначеного в (5), в якій швидкість переносу лінійна відносно u і z:

$$\hat{u}(z, u) = \hat{u} z + u ,$$
$$\hat{u} z + u \geq 0 ,$$

де $u \in U$,
$\hat{u}$ – деяка константа.

Розглянемо задачу оптимального керування усередненим процесом в розумінні критерію якості з функцією

$$\hat{K}(z, u) = z^2 + l\, u^2 ,$$

де l – невідома додатна константа.

Функція $\hat{V}_0(z)$ задовольняє умовам теореми 1 та існують такі $z \in R_+$, для яких можна підібрати додатну константу b :

$$\hat{u} z + u < \hat{a} ,$$
$$0 < b \leq \frac{2(\hat{a} - \hat{u} z - u)}{z} .$$

З рівняння, що пов'язує функцію Ляпунова і оптимальне керування, отримаємо:

$$\min_{u \in U}((\hat{u} z + u - \hat{a}) \cdot 2z + z^2 + l\, u^2) = 0 ,$$

що рівносильно

$$z^2(2\hat{u} + 1) - 2z\hat{a} = -\min_{u \in U}(l\, u^2 + 2zu) =$$
$$= -l\, \hat{u}_0^2 - 2z\, \hat{u}_0 , \tag{11}$$

де $\hat{u}_0$ – оптимальне керування.

Так як $l > 0$, то в (11), очевидно, функція від u набуватиме мінімального значення при

$$\hat{u}_0 = \frac{-z}{l} . \tag{12}$$

Підставивши (12) в (11), отримаємо:

$$z^2(2\hat{u} + 1) - 2z\hat{a} = \frac{z^2}{l} ,$$

звідки знаходимо невідому константу

$$l = \frac{z}{z(2\hat{u} + 1) - 2\hat{a}} , \tag{13}$$

де z, $\hat{u}$, $\hat{a}$ – відомі вихідні параметри.

Для кожного фіксованого z ,

$$z > \frac{2\hat{a}}{2\hat{u} + 1} > 0 ,$$

такого, що існує константа b , з (13) знаходимо $l > 0$, тоді з (12) знаходимо керування, що буде оптимальним для імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (3), в схемі усереднення і матиме вигляд

$$\hat{u}_0 = 2\hat{a} - (2\hat{u} + 1)z .$$

Означення 2. Керований імпульсний процес переносу $z^e(t)$ в просторі станів $(R_+, \mathrm{B}(R_+))$ в напівмарковському випадковому середовищі $x(t/e^2)$ задається інтегральним рівнянням

$$z^e(t) = z + \int_0^t u(z^e(s), x(s/e^2), u^e)ds - e \sum_{k=1}^{n(t/e^2)} a(x_k) , \tag{14}$$

де керування $u^e \in U$, такі, що

$$u^e = u^e(z^e(t), x(t/e^2), g(t/e^2)) ,$$

U – компактна множина допустимих керувань, і

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^e(z, x, t) = \overline{u}(z),\ \forall (z, x, t) \in R_+ \times X \times R_+ ;\ \overline{u} \in U . \tag{15}$$

Дифузійний процес [3], що відповідає керуванню $\overline{u}$, визначеному в (15), і є слабкою границею в просторі $D_R[0, +\infty)$ при $e \to 0$ імпульсного процесу переносу $z^e(t)$ в (14) при виконанні умови балансу

$$\hat{u}(z, u) = \hat{a}, \quad \forall z \in R_+ ,$$

де $\hat{u}(z, u)$ і $\hat{a}$ визначені в (6), (7), відповідно, задається розв'язком рівняння

$$\begin{cases} d\overline{z}(t) = a(\overline{z}(t), \overline{u}(\overline{z}(t)))dt + b(\overline{z}(t), \overline{u}(\overline{z}(t)))dw(t) , \\ \overline{z}(0) = z , \end{cases} \tag{16}$$

де $w(t)$ – стандартний вінерівський процес,

$$a(z,u) = \int\limits_X \frac{r(dx)}{m}[[m_1(x)u(z,x,u) - Pa(x)](R_0 - I)\times$$

$$\times m_1(x)u'_z(z,x,u) + m_2(x)/2\cdot u(z,x,u)u'_z(z,x,u)], \quad (17)$$

$$b^2(z,u) = 2\int\limits_X \frac{r(dx)}{m}[[m_1(x)u(z,x,u) - Pa(x)](R_0 - I)\times$$

$$\times[m_1(x)u(z,x,u) - Pa(x)] - m_1(x)u(z,x,u)Pa(x) +$$
$$+Pa^2(x)/2 + m_2(x)/2\cdot u^2(z,x,u)], \qquad (18)$$

$$m_2(x) = \int\limits_0^\infty t^2 G_x(dt),$$
$$Pa(x) = \int\limits_X P(x,dy)a(y),$$

R_0 – потенціал вкладеного ланцюга Маркова $(x_n;\ n \geq 0)$.

Введемо позначення:

$$\overline{L}_u f(z) = a(z,u)\frac{d}{dz}f(z) + \frac{1}{2}b^2(z,u)\frac{d^2}{dz^2}f(z),$$
$$\forall f(z) \in C^2(R_+), \qquad (19)$$

– інфінітезимальний оператор дифузійного процесу $\overline{z}(t)$ в (16), що відповідає керуванню u, де функції $a(z,u)$ і $b(z,u)$ визначені в (17), (18), відповідно.

Визначимо *функціонал критерію якості* для дифузійного процесу $\overline{z}(t)$ в (16):

$$\overline{G}^0_z(\overline{u}) = \int\limits_0^\infty \overline{K}(\overline{z}(s), \overline{u}(\overline{z}(s)))ds, \qquad (20)$$

де функція $\overline{K}(z,u)$ – неперервна та невід'ємна.

Тоді введемо сім'ю функцій $K^e(z,x,t,u)$ таких, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^e(z,u,x,t) = \overline{K}(z,u),$$

і розглядатимемо задачу оптимальної стабілізації імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (14), в розумінні наступного критерію якості:

$$G^e_{z,x}(u^e) =$$
$$= \int\limits_0^\infty E_{z,x}K^e(z^e(t), x(t/e^2), u^e(z^e(t), x(t/e^2), g(t/e^2)))dt \quad (21)$$

Теорема 2 [2]. Нехай існує невід'ємна функція $\overline{V}_0(z) \in C^2(R_+)$, що задовольняє умовам

$$\lim_{z\to\infty} V(z) = +\infty,$$

$V(z)$ – поліноміальна і

$$V(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$a(z)\,V'_z(z) + \dfrac{b^2(z)V''_{zz}(z)}{2} \leq -g\,V(z)$ для деякого $g > 0$ і скінченного початкового параметра $z \in R_+$,

де функції $a(z)$ та $b(z)$ визначені в (17), (18), відповідно,

$$u(z) = a, \quad z \in R_+,$$

та керування $\overline{u}_0(z) \in U$ такі, що задовольняють при $z \in R_+$, $\overline{u} \in U$ умовам

$$\overline{L}_{\overline{u}_0}\overline{V}_0(z) + \overline{K}(z,\overline{u}_0) = 0,$$
$$\overline{L}_{\overline{u}}\overline{V}_0(z) + \overline{K}(z,\overline{u}) \geq 0,$$

де оператор $\overline{L}_{\overline{u}}$ визначений в (19).

Тоді функція $\overline{u}_0(z)$ розв'язує задачу про оптимальну стабілізацію імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (14), в схемі критерію якості $G^e_{z,x}(u^e)$ в (21) для достатньо малого та фіксованого $e > 0$, причому

$$\lim_{e\to 0} G^e_{z,x}(u^e) = \overline{G}^0_z(\overline{u}_0) = \overline{V}_0(z),$$

де функціонал $\overline{G}^0_z(\overline{u}_0)$ визначений в (20).

Візьмемо в якості оптимальної функції Ляпунова функцію

$$\overline{V}_0(z) = z^2,$$

де z – скінченний параметр,

та розглянемо таку модель процесу $z^e(t)$, визначеного в (14), в якій швидкість переносу лінійна відносно u і z:

$$u(z,x,u) = u(x)(z+u),$$
$$z + u \geq 0,$$

де $u(x)$ – додатна, обмежена, неперервна функція, $u \in U$.

Розглянемо задачу оптимального керування дифузійним процесом $\overline{z}(t)$, визначеним в (16), в розумінні критерію якості з функцією

$$\overline{K}(z,u) = z^2 + l\,u^2,$$

де l – невідома додатна константа.

Можна підібрати константу g та існують $z \in R_+$, для яких функція $\bar{V}_0(z)$ задовольняє умовам теореми 2.

Коефіцієнти $a(z,u)$ і $b^2(z,u)$ рівні відповідно

$$a(z,u) = a_1 z + a_1 u - a_2,$$

де

$$a_1 = \int_X \frac{r(dx)}{m}\left[m_1(x)u(x)(R_0 - I)m_1(x)u(x) + \frac{m_2(x)}{2}u^2(x)\right],$$

$$a_2 = \int_X \frac{r(dx)}{m} Pa(x)(R_0 - I)m_1(x)u(x);$$

$$b^2(z,u) = 2a_1 z^2 + 2a_1 u^2 - b_1 z - b_1 u + 4a_1 zu + b_2,$$

$$b_1 = 2a_2 + \int_X \frac{r(dx)}{m}[m_1(x)u(x)(R_0 - I)Pa(x) + $$
$$+ m_1(x)u(x)Pa(x)],$$

$$b_2 = 2\int_X \frac{r(dx)}{m}\left[Pa(x)(R_0 - I)Pa(x) + \frac{Pa^2(x)}{2}\right].$$

З рівняння, що пов'язує функцію Ляпунова і оптимальне керування, отримаємо:

$$\min_u \Big[(a_1 z + a_1 u - a_2)2z + \frac{1}{2}(2a_1 z^2 + 2a_1 u^2 -$$
$$- b_1 z - b_1 u + 4a_1 zu + b_2)\cdot 2 + z^2 + l\,u^2\Big] = 0,$$

що рівносильно

$$2a_1 z^2 - 2a_2 z + 2a_1 z^2 - b_1 z + b_2 + z^2 =$$
$$= -\min_u [u^2(2a_1 + l) + u(2a_1 z - b_1 + 4a_1 z)] =$$
$$= -(2a_1 + l)\bar{u}_0^2 - (6a_1 z - b_1)\bar{u}_0, \qquad (22)$$

де $\bar{u}_0$ оптимальне керування.

Якщо $2a_1 + l > 0$ (коефіцієнт a_1 регулюється вихідними функціями $u(x)$, $a(x)$), то із співвідношення (22) знаходимо мінімальне значення функції від u:

$$\bar{u}_0 = -\frac{6a_1 z - b_1}{2(l + 2a_1)}. \qquad (23)$$

Підставивши (23) в (22), отримаємо:

$$(4a_1 + 1)z^2 - (2a_2 + b_1)z + b_2 = \frac{[6a_1 z - b_1]^2}{4(l + 2a_1)},$$

звідки знаходимо невідому константу

$$l = \frac{[6a_1 z - b_1]^2}{4[(4a_1 + 1)z^2 - (2a_2 + b_1)z + b_2]} - 2a_1. \qquad (24)$$

Для кожного фіксованого z, такого, що функція $\bar{V}_0(z)$ задовольняє умовам теореми 2, з (24) знаходимо константу l, $l > 0$ (такі l завжди існують, так як коефіцієнти a_1, a_2, b_1, b_2 є регульованими вихідними параметрами). Підставивши l в формулу (23), отримаємо оптимальне керування для імпульсного процесу переносу $z^e(t)$, визначеного в (14), в схемі дифузійної апроксимації при виконані умови балансу:

$$\bar{u}_0 = 2\frac{(4a_1 + 1)z^2 - (2a_2 + b_1)z + b_2}{b_1 - 6a_1 z}.$$

Висновки. При квадратичному критерії якості для фіксованого $e > 0$ знайдені оптимальні керування для граничних в розумінні слабкої збіжності усередненого та дифузійного процесів, що будуть оптимальними і для імпульсного процесу переносу в схемах усереднення та дифузійної апроксимації при виконанні умови балансу, відповідно.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ДАНІ

1. Гончарова С.Я. Оптимальне керування процесами ризику в схемі усереднення // Доп. НАН України. – 1999.– №10. – С. 20–24.

2. Гончарова С.Я. Оптимальне стохастичне керування напівмарковськими процесами ризику в схемі дифузійної апроксимації // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. наук. – 2003, – № 1. – С. 15–20.

3. Королюк В.С., Свищук А.В. Полумарковские случайные эволюции. – К.: Наукова думка, 1992. – 256 с.

Стаття надійшла 20.04.2007
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Саленком О.Ф.