

УДК 531.231

ВПЛИВ ПОВІЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ МЕХАНІЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**Ведміцький Ю. Г., асистент, Кухарчук В. В., д.т.н., проф.****Вінницький національний технічний університет**

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95

E-mail: wjg@ukr.net

В данной статье исследовано воздействие на момент инерции медленных деформаций, происходящих в механических и электромеханических системах с вращательной формой движения. Для этого разработана обобщенная математическая модель момента инерции произвольно деформированного физического тела цилиндрической формы, которая применена к некоторым распространенным деформациям. В результате анализа получены расчетные соотношения, значения интерполяционных коэффициентов и построены графические зависимости для разных уровней деформации.

Ключевые слова: момент инерции, ось вращения, деформация, цилиндрическое тело.

In the given paper the influence on the moment of inertia of slow deformations in mechanical and electromechanical systems with the rotary form of movement is investigated. Practical formulas are presented, interpolation coefficients are calculated and dependences on different strains are plotted.

Key words: moment of inertia, rotation axis, deformation, cylindrical solid.

Вступ. Момент інерції механічних та електромеханічних систем з обертовою формою руху визначає міру їх інертності, а отже, і еволюцію цих систем під час перехідного процесу.

Будь-яка зміна моменту інерції системи призводить до зміни її властивостей, незалежно від причин, що викликали таку зміну. В першу чергу це позначається на її динамічних характеристиках.

Як наслідок, змінюються не тільки статичний та динамічний режими роботи самої системи, але може змінитися і характер взаємодії даної системи з системою живлення та іншими складовими технічного та фізичного середовища, що оточує систему.

За певних обставин така зміна моменту інерції системи може виявитися критичною і призвести до незворотних наслідків.

Звісно, що причинами зміни моменту інерції механічних та електромеханічних систем можуть бути різноманітні обставини, але в усіх без винятку випадках кінцевим фактором залишається перерозподіл фізичної маси обертових частин цих систем в просторі.

Найбільш небезпечними є повільні деформації, тобто такі, які відбуваються на протязі тривалого проміжку часу. Це пояснюється тим, що, по-перше, такі деформації довго залишаються непомітними, часто навіть під час цільових обстежень системи, а по-друге, їх дестабілізуюча дія починається відразу і під час роботи системи ні на мить не припиняється, лише посилюється із збільшенням ступеня деформації.

Небезпека таких деформацій полягає і в тому, що вони мало досліджені і що на сьогодні відсутнє систематизоване теоретичне підґрунтя їх оцінки з необхідними для цього прикладними розрахунковими

співвідношеннями та іншою технічною інформацією якісного та кількісного характеру.

Дана робота не претендує на повний розв'язок поставленої задачі. Цьому перешкоджають кілька обставин, основною з яких є різноманітність існуючих механічних та електромеханічних систем з обертовою формою руху. Однак деякі спільні риси, притаманні більшості означених систем, все ж дозволяють вже зараз закласти підвалини формування узагальненої математичної моделі моменту інерції деформованих систем.

Аналіз попередніх досліджень. Існуюча теорія моментів інерції як складова геометрії мас розроблена лише для систем з статичним розподілом маси [1-9] і потребує узагальнення на випадок просторового перерозподілу заданої маси. Відповідно і задача систематизованого дослідження зміни моменту інерції за умови деформації механічних та електромеханічних систем з обертовою формою руху на сьогодні не розв'язана і загальної теоретичної підтримки не має.

Мета дослідження. Дана робота ставить перед собою за мету дослідити момент інерції деформованого фізичного тіла циліндричної форми з рівномірним розподілом маси в ньому, оскільки саме такі об'єкти складають більшість або ж входять в склад переважної більшості існуючих систем з обертовою формою руху.

У зв'язку з цим передбачається:

- навести розроблену узагальнену математичну модель моменту інерції;

- застосувати узагальнену математичну модель на деяких існуючих видах повільних деформацій;

- отримати прикладні розрахункові співвідношення для надмалих, малих, середніх та значних повільних деформацій 1-го і 2-го типів;

- побудувати на підставі наведених співвідношень графічні залежності зміни моменту інерції.

Матеріал і результати дослідження. Для розв'язання задачі отримаємо узагальнену математичну модель.

Узагальнена математична модель. Оскільки повільна деформація відбувається на протязі тривалого проміжку часу, момент інерції деформованого колового циліндра відносно осі обертання (вісь 0x) визначимо, скориставшись основними положеннями теорії моментів інерції [2-5].

Аналіз показує, що вісь циліндра за умови його довільної деформації являє собою гладку криву Γ , що в загальному випадку задана деякою неперервною функцією $y = f(x)$ (рис. 1). Неперервність самої функції та її похідних зумовлена фізичними властивостями речовини циліндричного тіла та умовою його неруйнівної деформації.

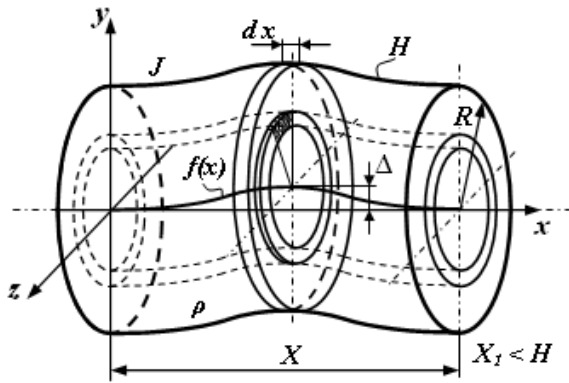


Рисунок 1 – Деформований коловий циліндр

Як видно з рисунка, у випадку деформації циліндра кожний з його елементарних циліндрів буде зміщений від осі обертання на величину $f(x)$. Тоді відповідно до теореми Гюйгенса-Штейнера момент інерції будь-якого елементарного циліндра має зрости [2].

Після інтегрування за координатою x та нескладних математичних перетворень отримаємо момент інерції довільно деформованого циліндра відносно осі обертання:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 + \pi \rho R^2 \int_0^{X_1} [f(x)]^2 dx, \quad (1)$$

де X_1 є проекцією кривої Γ на вісь 0x за умови, що початок цієї кривої проектується в точку початку координат, R – радіус колового циліндра, H – його довжина.

Задача визначення координати X_1 являє собою окрему математичну задачу і зводиться до необхідності розв'язання математичного рівняння:

$$\int_0^{X_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = H, \quad (2)$$

в якому невідомою величиною є верхня межа інтегралу.

Отримані рівняння (1) і (2) в сукупності і складають узагальнену математичну модель моменту інерції довільно деформованого циліндричного тіла

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 \left\{ X_1 + \frac{2}{R^2} \int_0^{X_1} [f(x)]^2 dx \right\}, \quad (3)$$

$$\int_0^{X_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = H.$$

Момент інерції деформації 1-го типу. Деформацією 1-го типу назовемо деформацію, показану на рис. 2, а.

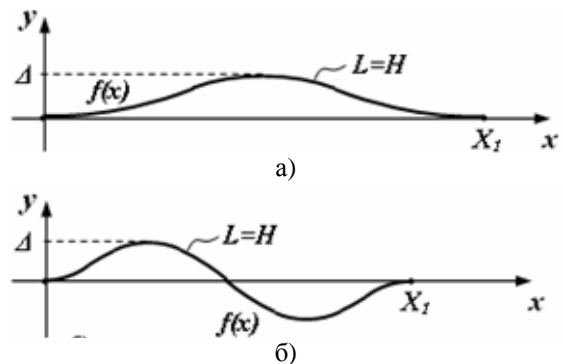


Рисунок 2 – Деформації 1-го (а) та 2-го (б) типів

Її математичною моделлю в першому наближенні буде функція:

$$y = \frac{\Delta}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{X_1} x \right),$$

де $\Delta = f_{\max}$ – максимальне відхилення власної осі деформованого циліндра від осі обертання.

Тоді, врахувавши (3), для моменту інерції за деформації 1-го типу можна записати:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 \left\{ 1 + \frac{3 \Delta^2}{4 R^2} \right\}, \quad (4)$$

$$\int_0^{X_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left(\sin \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx = H.$$

Нескладно довести, що друге рівняння системи (4) зводиться до рівняння:

$$B(\xi) X_1 = H, \quad (5)$$

$$\text{де } B(\xi) = 2\xi \int_0^{1/2\xi} \sqrt{1 + \pi^2 \xi^2 (\sin 2\pi \xi \tau)^2} d\tau, \quad \xi = \frac{\Delta}{X_1}.$$

Рівняння (5) у випадку апроксимації функції $B(\xi)$ (рис. 3) поліномом, що не перевищує 4-го ступеня, може бути представлено канонічною фо-

рмою алгебраїчного рівняння і розв'язане у радикалах відносно X_1 .

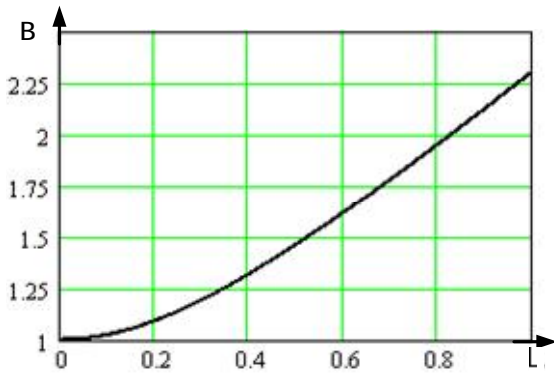


Рисунок 3 – Спеціальна функція $V(\xi)$

Враховуючи, що на практиці зазвичай $\Delta \ll X_1$, замістимо функцію $V(\xi)$ наближеною квадратичною функцією:

$$V(\xi) = a_0 \xi^2 + a_1 \xi + a_2. \quad (6)$$

Тоді для деформації 1-го виду момент інерції циліндричного тіла відповідно до (5) набуде вигляду

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 H \left[\frac{1}{a_2} \left(1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right) + \frac{1}{a_2} \sqrt{\left(1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 4a_0 a_2 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \quad (7)$$

Умовно розділимо існуючі деформації 1-го типу в залежності від співвідношення між Δ та H на надмалі ($\Delta/H \leq 0,025$), малі ($\Delta/H \leq 0,1$), середні ($\Delta/H \leq 0,25$) та значні ($\Delta/H < 0,5$) деформації.

Інтерполяційні коефіцієнти a_0 , a_1 та a_2 квадратичного тричлена (6) знайдемо для кожної з областей деформації окремо шляхом мінімізації функції $F(\xi_1) = \int_{\xi_0}^{\xi_2} |V(\xi) - V(\xi_1, \xi)| d\xi$. Результати розрахунку наведені на рис. 4.

Там же побудуємо графічні залежності зміни коефіцієнту моменту інерції $w_J = \frac{J}{J_0}$ як функції трьох змінних $w_J = f(\Delta, H, R)$, J_0 являє собою момент інерції недеформованого циліндра $J_0 = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 H$.

Момент інерції деформації 2-го типу. Деформацію 2-го типу для фізичних тіл циліндричної форми показано на рис. 2, б.

В першому наближенні цей тип деформації подамо як:

$$y = \Delta \sin \frac{2\pi}{X_1} x.$$

Тоді відповідно до (3) математична модель для деформації 2-го типу:

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 \left(1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right); \\ \int_0^{X_1} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left(\cos \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx &= H, \end{aligned} \right\}$$

і після математичного аналізу, проведеного подібно деформації 1-го типу, отримаємо:

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 H \left[\left(1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left(1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 16a_0 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left(1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \quad (8)$$

На рис. 5 наведені графічні залежності $w_J = f(\Delta, H, R)$ за різного співвідношення між Δ , R , H для деформацій 2-го типу, які умовно розділимо на надмалі ($\Delta/H \leq 0,025$), малі ($\Delta/H \leq 0,05$), середні ($\Delta/H \leq 0,1$) та значні ($\Delta/H < 0,25$) деформації.

Обмеження. Наразі необхідно зазначити, що для наведених математичних співвідношень для розрахунку моменту інерції для деформацій 1-го та 2-го типу (7) та (8) існують обмеження у співвідношенні між Δ та H .

Так, наприклад, для деформації 1-го типу внаслідок того, що $X_1 \in \mathbb{R}$, відношення $\frac{\Delta}{H}$ у випадку

$$\frac{\Delta}{H} > \frac{1}{a_1} \text{ не повинно перевищувати } \frac{1}{a_1 - 2\sqrt{a_0 a_2}}$$

ж бути завжди меншим за $\frac{1}{a_1 + 2\sqrt{a_0 a_2}}$ у всіх інших

випадках. Однак фізична умова $X_1 \geq 0$ заперечує існування нерівності $\frac{\Delta}{H} > \frac{1}{a_1}$ і тому у всіх без ви-

ключення фізично спроможних випадках:

$$0 \leq \frac{\Delta}{H} < \frac{1}{a_1 + 2\sqrt{a_0 a_2}}.$$

Водночас умова $\xi \in [\xi_0; \xi_2]$ в свою чергу накладає обмеження на відношення $\frac{\Delta}{H}$.

Нескладно довести, що за заданої умови має місце відношення:

$$\frac{\xi_0}{a_0 \xi_0^2 + a_1 \xi_0 + a_2} \leq \frac{\Delta}{H} \leq \frac{\xi_2}{a_0 \xi_2^2 + a_1 \xi_2 + a_2}.$$

Для деформації 2-го типу означені умови є більш жорсткішими і наведені проміжки зменшуються удвічі.

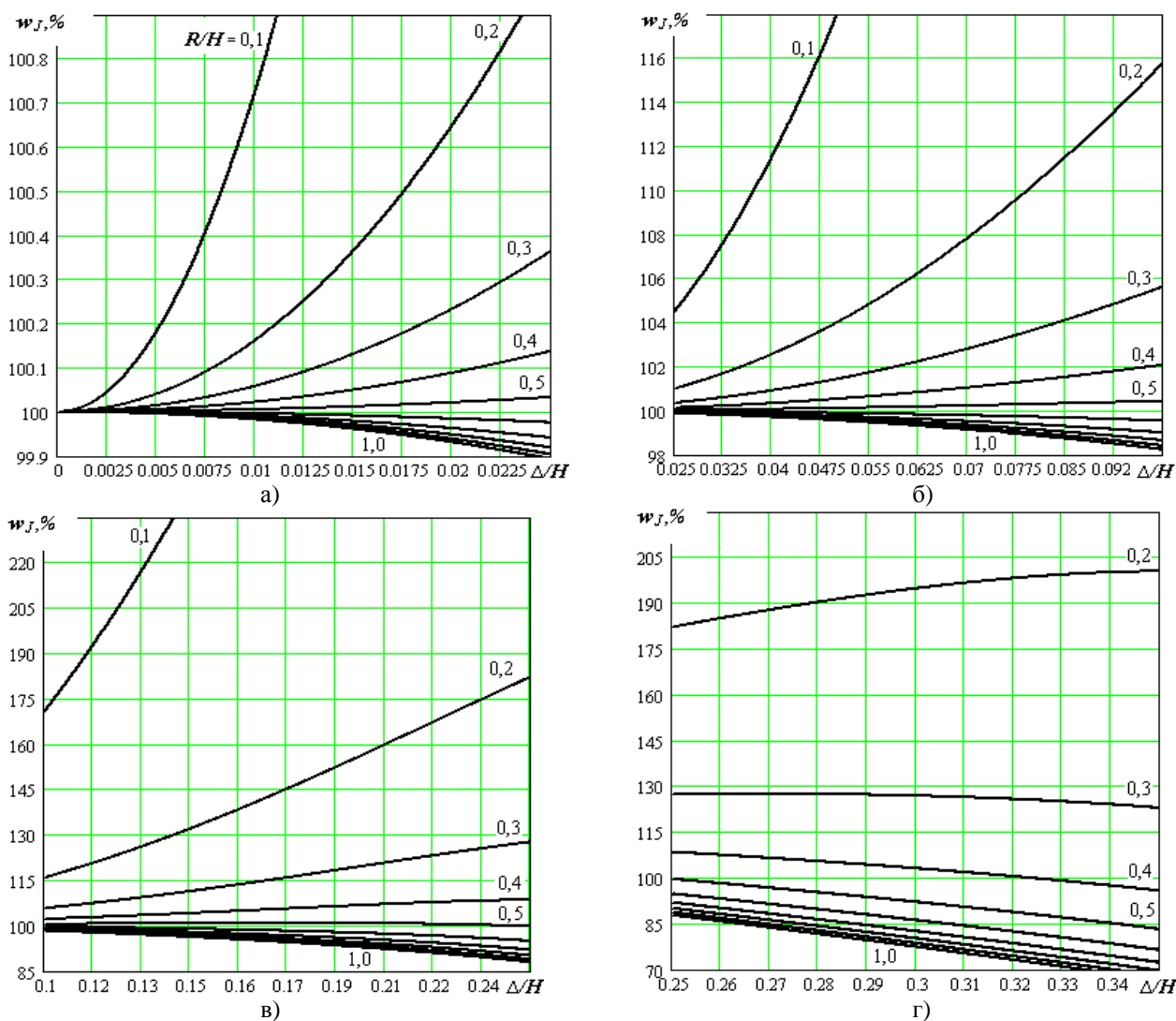


Рисунок 4 – Графічні залежності коефіцієнта моменту інерції для деформацій 1-го типу:
 а) надмалі деформації ($a_0=2,465$, $a_1=2,848 \cdot 10^{-8}$, $a_2=1$); б) малі деформації ($a_0=2,353$, $a_1=8,341 \cdot 10^{-3}$, $a_2=1$);
 в) середні деформації ($a_0=1,688$, $a_1=0,177$, $a_2=0,989$); г) значні деформації ($a_0=0,083$; $a_1=1,557$; $a_2=0,721$)

Аналіз отриманих функціональних залежностей показує, що зміна коефіцієнта моменту інерції w_J , а отже, і самого моменту інерції J , під час деформації циліндра як 1-го, так і 2-го типу не є однозначною і суттєво залежить від співвідношення між максимальним відхиленням Δ власної осі деформованого циліндра, довжиною циліндра H і його радіусом R .

Як видно з рисунків таблиць 1 і 2, за певного співвідношення між H і R момент інерції деформованого циліндричного тіла на заданих відрізках може не тільки монотонно зростати, але і зменшуватися.

Крім того, функції $w_J = f(\Delta, H, R)$ для деформацій обох типів на вказаних відрізках за деяких умов здатні мати кілька екстремумів.

І нарешті, момент інерції в окремих випадках може проявляти квазіінваріантність навіть до суттєвих деформацій.

Пояснюється все це протилежним і складним характером залежності від Δ співмножників, що входять до формули (7) для деформації 1-го типу та формули (8) для деформації 2-го типу відповідно.

Кількісний аналіз функцій $w_J = f(\Delta, H, R)$ доводить, що навіть за незначних деформацій зміна моменту інерції може стати критичною.

Проте остаточний висновок щодо критичності необхідно робити для кожної механічної чи електромеханічної системи окремо.

Висновки. В роботі вперше сформульована задача дослідження зміни моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертовою формою руху внаслідок їх повільної фізичної деформації.

Розроблена узагальнена математична модель моменту інерції деформованого фізичного тіла циліндричної форми.

Проведений математичний аналіз узагальненої математичної моделі відносно деяких видів дефор-

мацій і отримані прикладні співвідношення для моментів інерції тіл з деформаціями 1-го та 2-го типів.

Побудовані графічні залежності зміни коефіцієнта моменту інерції для деформацій 1-го і 2-го типів.

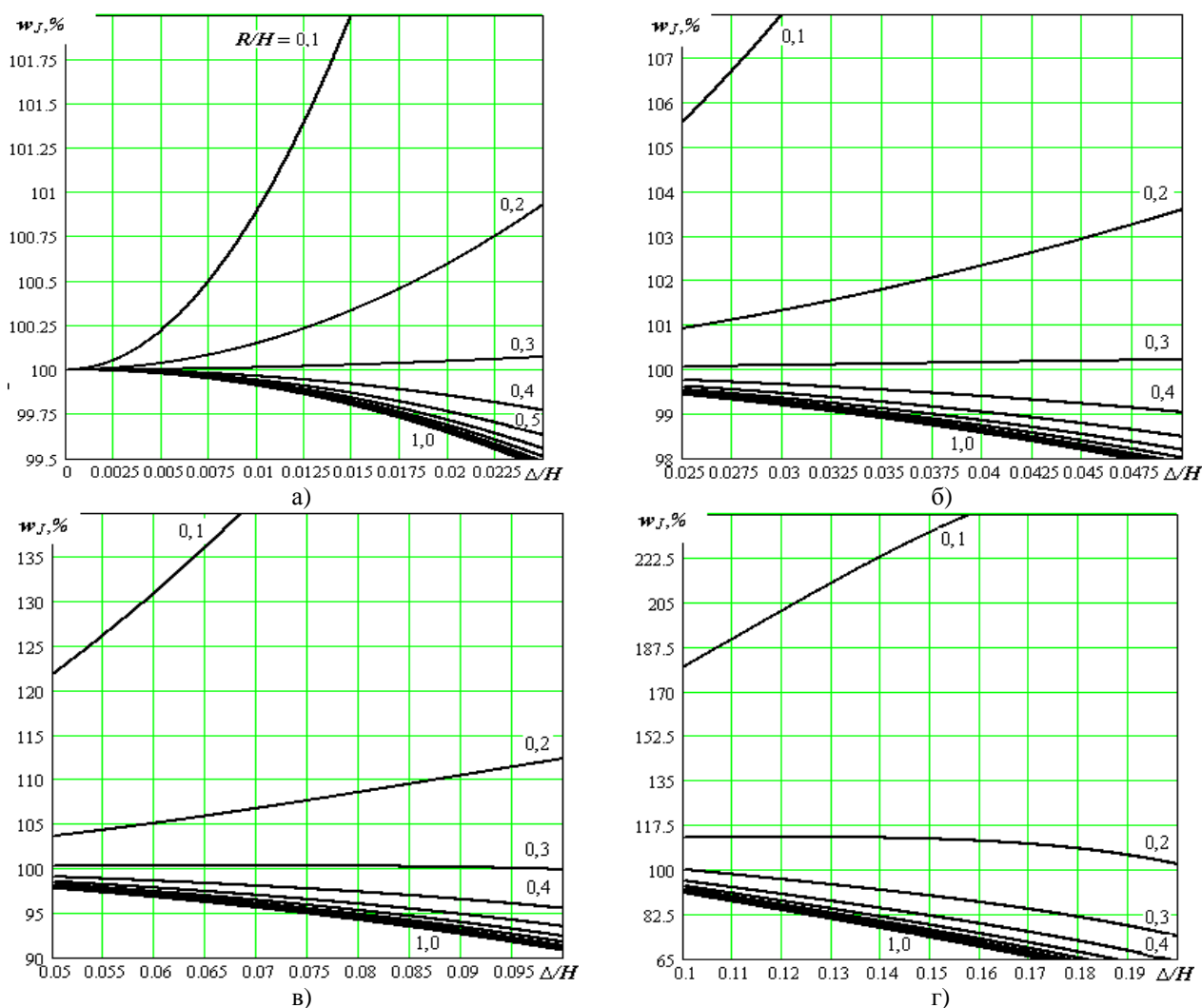


Рисунок 5 – Графічні залежності коефіцієнта моменту інерції для деформацій 2-го типу:
 а) надмалі деформації ($a_0=2,448$, $a_1=4,227 \cdot 10^{-4}$, $a_2=1$); б) малі деформації ($a_0=2,356$, $a_1=8 \cdot 10^{-3}$, $a_2=1$);
 в) середні деформації ($a_0=1,898$, $a_1=0,111$, $a_2=0,994$); г) значні деформації ($a_0=0,181$, $a_1=1,328$, $a_2=0,807$)

БІБЛІОГРАФІЧНІ ДАНІ

1. Овчинников П.П. та ін. Вища математика. У 2 ч. Ч. 1 – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
2. Дронг В.И. и др. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
3. Де ла Валле Пуссен Ш.-Ж. Лекции по теоретической механике. В 2-х т. Т. 2 – М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1949. – 328 с.
4. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. – Ижевск: Издат. дом Удмуртский университет, 1999. – 588 с.

5. Раус Э. Динамика системы твердых тел. В 2-х т. Т.1. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 464 с.
6. Ведмицький Ю.Г., Кухарчук В.В. Рівняння Лагранжа як основа теорії перетворювачів моменту інерції // Вісник КДПУ. – Вип. 3/2005 (32). – С. 89-91.
7. Фаворин М. В. Моменты инерции тел: Справочник. – М.: Машиностроение, 1977. – 511 с.
8. Гернет М. М., Ратобильский В. Ф. Определение моментов инерции. – М.: Машиностроение, 1985. – 248 с.

Стаття надійшла 18.04.2007 р.