

УДК 621.3.01

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНОМ ТРАНСФОРМАТОРЕ С УТОЧНЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХЕМОЙ БЕЗ ИНДУКТИВНЫХ СВЯЗЕЙ**

*Придубков П. Я., к. т. н., доцент кафедры электротехники  
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, г. Харьков  
Украина, г. Харьков, пер. Фейербаха, 7, 39601*

Рассмотрены процессы, протекающие в идеальном трансформаторе, уточнена его эквивалентная схема без индуктивных связей, соответствующая электромагнитным явлениям, происходящим в нем. Использование эквивалентной схемы без индуктивных связей упростит понимание электромагнитных процессов, протекающих в трансформаторе, и позволит повысить эффективность разработок электротехнических устройств.

**Ключевые слова:** трансформатор, четырехполюсник, первичная и вторичная обмотки, схема замещения.

The processes proceeding in the ideal transformer, its equivalent scheme without the inductive communications, corresponding the electromagnetic phenomena occurring in it is specified are considered. Use of the equivalent scheme without inductive communications will simplify understanding of the electromagnetic processes proceeding in the transformer, and will allow to raise efficiency of development of electrotechnical devices.

**Keywords:** transformer, two-port network, primary and secondary windings, equivalent circuit.

**Введение.** Трансформатор является одним из важнейших элементов электротехнических устройств и состоит из электрически не соединенных, неподвижных относительно друг друга, индуктивно связанных между собой обмоток. Для того, чтобы увеличить магнитный поток взаимной индукции, обмотки трансформатора наматывают на ферромагнитный сердечник, что приводит к нелинейной зависимости между величиной магнитного потока и током обмоток. Поэтому, свойства такого трансформатора будут нелинейными.

Однако, в системах телемеханики, радиотехники, сигнализации и связи, а также в измерительных устройствах сердечники трансформаторов находятся в линейном режиме, а при высоких частотах применяются воздушные трансформаторы, не содержащие ферромагнитных сердечников. Такие трансформаторы обладают линейными характеристиками, и, следовательно, процессы, происходящие в них, могут быть описаны линейными уравнениями. Основные параметры рабочего режима таких трансформаторов определяются при расчетах, предполагающих линейность.

Эквивалентные схемы замещения этих трансформаторов с устраненными индуктивными связями, составленные для приведенных токов и напряжений, облегчают понимание электромагнитных явлений, происходящих в трансформаторах, и используются при изложении соответствующего теоретического материала в курсах теоретических основ электротехники (ТОЭ).

**Анализ предыдущих исследований.** Описываемая в соответствующих разделах теории линейных электрических цепей электрическая схема замещения линейного трансформатора без индуктивных связей [1—3], не адекватна процессам, происходящим в данном трансформаторе. Данная схема является простой электрической схемой, поэтому направления токов в ее ветвях должны соответство-

вать направлению действующего на входе трансформатора напряжения. Если выполняется это соответствие [1], то уравнения:

$$\begin{cases} U_1 - j\omega M I_2 = I_1 R_1 + j\omega L_1 I_1 \\ -j\omega M I_1 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + U_2 \end{cases}, \quad (1)$$

составленные по второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной обмоток трансформатора, не равнозначны аналогичным уравнениям:

$$\begin{cases} U_1 + j\omega M I_2 = I_1 R_1 + j\omega L_1 I_1 \\ j\omega M I_1 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + U_2 \end{cases}, \quad (2)$$

описывающим электромагнитные явления входного и выходного контуров эквивалентной схемы. В другом случае [3], в простой эквивалентной схеме замещения трансформатора направление тока, протекающего через ветвь, содержащую нагрузку, противоположно действию входного напряжения, что противоречит электромагнитным процессам, протекающим в простой электрической цепи.

Уточнение эквивалентной схемы линейного трансформатора без индуктивных связей позволит существенно повысить эффективность разработок электротехнических устройств, так как изложение теоретического материала о принципе действия линейного трансформатора при его изучении будет соответствовать происходящим электромагнитным явлениям.

В статье [4] рассмотрены процессы, протекающие в идеальном трансформаторе (без потерь), и уточнена его эквивалентная схема без индуктивных связей, соответствующая электромагнитным явлениям, происходящим в нем. Однако, ее использование в расчетах электротехнических устройств не представляется возможным, так как процессы, протекающие в реальном трансформаторе, отличаются от аналогичных явлений в идеальном трансформаторе.

**Цель работы.** Анализ функционирования реального трансформатора, разработка и исследование эквивалентной схемы линейного трансформатора без индуктивных связей, адекватной электромагнитным процессам, происходящим в нем.

**Материал и результаты исследования.** В соответствии с законом сохранения энергии в пространстве, где не совершается механическая работа по перемещению заряженных проводящих тел и проводящих контуров с токами, энергия, доставляемая в виде потока вектора Пойнтинга внутрь некоторого объема, превращается внутри этого пространства в тепло и идет на приращение энергии электромагнитного поля. Энергетические соотношения электромагнитного поля описывает теорема Умова-Пойнтинга [5]:

$$-\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV, \quad (3)$$

где  $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  — вектор Пойнтинга;  $\int_V \gamma E^2 dV$  — энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единицу времени в объеме  $V$ ;  $\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$  — скорость изменения запаса электромагнитной энергии.

Трансформатор является электростатическим устройством, содержащим не менее двух электрически не соединенных, неподвижных относительно друг друга, индуктивно связанных между собой обмоток. Энергия из первичной обмотки во вторичную передается посредством магнитного поля, создаваемого токами этих обмоток. Если обмотки находятся в неферромагнитной среде, то энергия их магнитного поля определяется при помощи следующего выражения [6]:

$$W_M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (4)$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность результирующего магнитного поля, создаваемого токами первичной, и вторичной обмоток трансформатора.

Анализ процесса преобразования энергии в трансформаторе основывается на общей теории Умова [7], соответствующей закону сохранения энергии и представлениям о ее физической реализации: если внутри некоторого объема происходит изменение энергии, то через замкнутую поверхность, охватывающую данный объем, должен пройти поток энергии, равный этому изменению. Скорость изменения данного потока характеризуется вектором Пойнтинга  $\mathbf{P}$ .

Направление вектора Пойнтинга  $\mathbf{P}_1$  в начале двухпроводной линии, соединенной с витками первичной обмотки трансформатора, определяется векторами напряженностей электромагнитного поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{H}_1$ , и соответствует поступлению электромагнитной энергии в первичную обмотку трансформатора.

Картина поля векторов  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{P}_2$  для вторичной обмотки трансформатора и отходящей от нее двухпроводной линии аналогична и соответствует передаче электромагнитной энергии посредством магнитного поля из первичной обмотки во вторичную [7].

Зависимость  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  для магнитной цепи линейного трансформатора линейна ( $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$ ), так как  $\mu_a = \text{const}$ , поэтому ее магнитное сопротивление линейно:

$$R_M = \sum_{k=1}^n \frac{l_k}{\mu_a S_k}. \quad (5)$$

Таким образом, данная цепь является линейной и при ее расчете может быть использован принцип суперпозиции.

Ток, протекающий в первичной обмотке трансформатора, создает магнитный поток, который пронизывает и первичную, и вторичную обмотки. Во вторичной обмотке в соответствии с законом электромагнитной индукции наводится электродвижущая сила взаимной индукции, обуславливающая ток во вторичной обмотке, который вызывает магнитный поток, пронизывающий так же и первичную, и вторичную обмотки. В соответствии с принципом суперпозиции, результирующий вектор  $\mathbf{H}$  напряженности магнитного поля трансформатора может быть определен как результат сложения вектора  $\mathbf{H}_1$  напряженности магнитного поля, создаваемого током первичной обмотки, и вектора  $\mathbf{H}_2$  напряженности магнитного поля, обусловленного током, протекающим через вторичную обмотку. То есть:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \quad (6)$$

Тогда:

$$H^2 = (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 = H_1^2 + 2\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 + H_2^2. \quad (7)$$

Следовательно, энергия магнитного поля линейного трансформатора равна:

$$W_M = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H_1^2}{2} dV + \int_V \mu_a \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 dV + \int_V \frac{\mu_a H_2^2}{2} dV. \quad (8)$$

Первый и последний члены правой части равенства (7) — это собственные магнитные энергии токов соответственно первичной и вторичной обмоток, а второй член — взаимная магнитная энергия данных токов [6].

Скорость изменения магнитной энергии (мощность), запасаемой в магнитном поле двух индуктивно связанных обмоток, описывается выражением:

$$\frac{dW_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\mu_a H_1^2}{2} dV + \int_V \mu_a \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 dV + \int_V \frac{\mu_a H_2^2}{2} dV \right) \quad (9)$$

Мощности, передаваемой из первичной обмотки трансформатора во вторичную, соответствует второе слагаемое последнего равенства.

В случае гармоничного поля и линейной среды, что имеет место при синусоидальном источнике питания, действующем на входе линейного трансформатора, выше указанная мощность может быть представлена в комплексной форме:

$$\frac{dW_{M12}}{dt} = j\omega \int_V \mu_a \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^* dV + j\omega \int_V \mu_0 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1^* dV, \quad (10)$$

где  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2^*$  — комплексно сопряженные векторы напряженности магнитных полей, создаваемых токами соответственно первичной и вторичной обмоток.

Так как электромагнитные процессы рассматриваются в линейном трансформаторе в однородной магнитной среде, то при заданной конфигурации проводников комплексные векторы напряженностей магнитного поля  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$  пропорциональны комплексам токов  $I_1$  и  $I_2$ , протекающим в первичной и вторичной обмотках. Поэтому, комплексная мощность, соответствующая взаимной магнитной энергии данных токов, может быть представлена:

$$\tilde{S}_{M12} = j\omega M I_1 I_2 + j\omega M I_2 I_1 = \tilde{S}_{1M} + \tilde{S}_{2M}, \quad (11)$$

где  $M$  — взаимная индуктивность обмоток трансформатора;  $I_1, I_2$  — комплексы токов первичной и вторичной обмоток;  $\tilde{S}_{1M}$  и  $\tilde{S}_{2M}$  — комплексные мощности, обусловленные взаимной индукцией и передаваемые из первичной обмотки во вторичную, и наоборот.

Следует иметь в виду, что ток первичной обмотки  $I_1 = I_1 e^{j\varphi_1}$  опережает ток вторичной  $I_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$  на угол  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ , который лежит в пределах  $0 < \theta < \pi$  [1]. Поэтому, активная мощность  $P_{1M}$ , передаваемая из первичной обмотки трансформатора во вторичную положительна:

$$P_{1M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) > 0, \quad (12)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — начальные фазы токов  $I_1, I_2$  соответственно, а активная мощность  $P_{2M}$ , передаваемая из вторичной обмотки трансформатора в первичную, отрицательна:

$$P_{2M} = \omega M I_2 I_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) < 0, \quad (13)$$

что и соответствует передачи электромагнитной энергии посредством магнитного поля из первичной обмотки трансформатора во вторичную [8].

В известной схеме замещения [1] в ветви, содержащей только сопротивление взаимной индуктив-

ности  $j\omega M$ , протекает ток  $I_1 - I_2$ . Комплексная мощность  $\tilde{S}_M$  данной ветви:

$$\tilde{S}_M = j\omega M \left( I_1 - I_2 \right) \left( I_1 - I_2 \right)^*. \quad (14)$$

Поэтому, мощность  $\tilde{S}_{12M}$ , соответствующая вза-

имной магнитной энергии токов ( $I_1$  и  $I_2$ ) определяется следующим выражением:

$$\tilde{S}_{M12} = -j\omega M I_1^* I_2 - j\omega M I_2^* I_1. \quad (15)$$

Следовательно,  $P_{1M} < 0$ , а  $P_{2M} > 0$ , что противоречит электромагнитным процессам, происходящим в трансформаторе.

В соответствии с законами Кирхгофа уравнения, описывающие электромагнитные процессы трансформатора, могут быть представлены следующими выражениями:

$$\begin{cases} U_1 - j\omega M I_2 = I_1 R_1 + j\omega L_1 I_1; \\ -j\omega M I_1 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + U_2. \end{cases} \quad (16)$$

Для уточнения эквивалентной схемы замещения трансформатора (рис. 1), не содержащей индуктивно связанных элементов, воспользуемся теорией четырехполюсников [1] и рассмотрим воздушный трансформатор как пассивный проходной четырехполюсник (рис. 2). Все процессы, происходящие в данном четырехполюснике, в полной мере могут быть описаны при помощи А-формы записи уравнений четырехполюсника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A \dot{U}_2 + B \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C \dot{U}_2 + D \dot{I}_2. \end{cases} \quad (17)$$

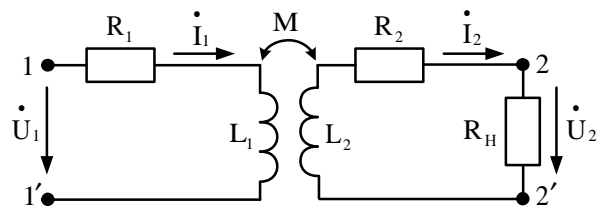


Рисунок 1 – Эквивалентная схема замещения Трансформатора

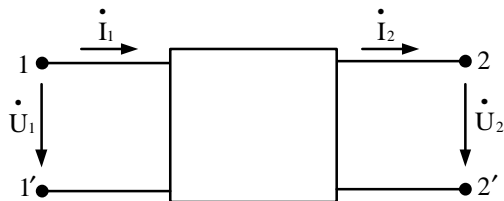


Рисунок 2 – Пассивный проходной четырехполюсник

Чтобы определить коэффициенты А-формы записи уравнений четырехполюсника, необходимо рассмотреть режимы холостого хода и короткого замыкания. В режиме холостого хода (рис. 3) ток

$I_{2x}$  на выходе трансформатора равен нулю, поэтому уравнения А-формы записи соответствуют выражения:

$$\begin{cases} U_{1x} = A U_{2x} \\ I_{1x} = C U_{2x} \end{cases}, \quad (18)$$

так как  $I_{2x} = 0$ .

Однако, в соответствии с законом Ома:

$$I_{1x} = \frac{U_{1x}}{R_1 + j\omega L_1} \text{ или } U_{1x} = (R_1 + j\omega L_1) I_{1x}. \quad (19)$$

На основании закона электромагнитной индукции, закона Фарадея:

$$U_{2x} = -j\omega M I_{1x} = E_{M12}. \quad (20)$$

Поэтому:

$$A = \frac{U_{1x}}{U_{2x}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1) I_{1x}}{-j\omega M I_{1x}} = -\frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M}; \quad (21)$$

$$C = \frac{I_{1x}}{U_{2x}} = \frac{I_{1x}}{-j\omega M I_{1x}} = -\frac{1}{j\omega M}. \quad (22)$$

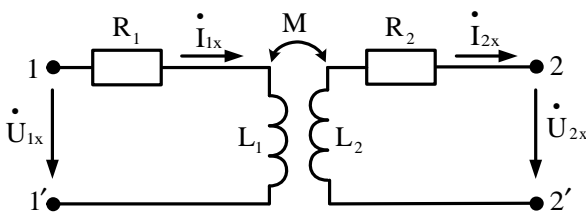


Рисунок 3 – Эквивалентная схема замещения трансформатора в режиме холостого хода

В режиме короткого замыкания (рис. 4) напряжение на выходе трансформатора равно нулю ( $U_{2k3} = 0$ ). Тогда:

$$\begin{cases} U_{1k3} = B I_{2k3}; \\ I_{1k3} = D I_{2k3}. \end{cases} \quad (23)$$

Однако, из уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа для вторичной и первичной обмоток трансформатора

$$-j\omega M I_{1k3} = (R_2 + j\omega L_2) I_{2k3}; \quad (24)$$

$$U_{1k3} - j\omega M I_{2k3} = (R_1 + j\omega L_1) I_{1k3}, \quad (25)$$

следует:

$$I_{1k3} = -\frac{(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega M} I_{2k3}; \quad (26)$$

$$U_{1k3} = (R_1 + j\omega L_1) I_{1k3} + j\omega M I_{2k3}. \quad (27)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} B &= \frac{U_{1k3}}{I_{2k3}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1) I_{1k3} + j\omega M I_{2k3}}{I_{2k3}} = \\ &= \frac{(R_1 + j\omega L_1) \left( -\frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} I_{2k3} \right) + j\omega M I_{2k3}}{I_{2k3}} = \\ &= -\frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega M} + j\omega M; \quad (28) \\ D &= \frac{I_{1k3}}{I_{2k3}} = \frac{-\frac{(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega M} I_{2k3}}{I_{2k3}} = \\ &= -\frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M}. \quad (29) \end{aligned}$$

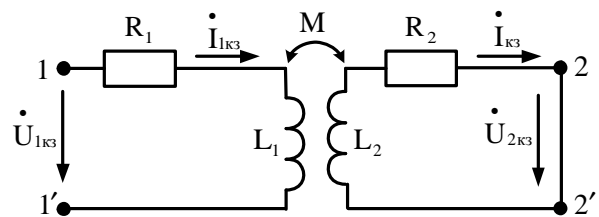


Рисунок 4 – Эквивалентная схема замещения трансформатора в режиме короткого замыкания

Найденным значениям коэффициентов А-формы записи уравнений четырехполюсника соответствуют следующие значения комплексных сопротивлений его Т-образной схемы замещения:

$$Z_3 = \frac{1}{C} = \frac{1}{-\frac{1}{j\omega M}} = -j\omega M; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{A-1}{C} = \frac{-\frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} - 1}{-\frac{1}{j\omega M}} = -\frac{(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M)}{j\omega M} = \\ &= R_1 + j\omega L_1 + j\omega M = R_1 + j\omega(L_1 + M); \quad (31) \end{aligned}$$

$$Z_2 = \frac{D-1}{C} = \frac{-\frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} - 1}{-\frac{1}{j\omega M}} = R_2 + j\omega(L_2 + M). \quad (32)$$

На рис. 5 изображена Т-образная схема замещения трансформатора, построенная в соответствии с полученными комплексными сопротивлениями.

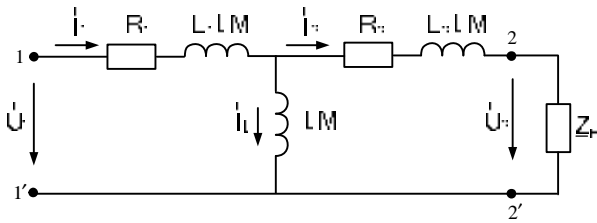


Рисунок 5 – Т-образная схема замещения трансформатора

Полученная Т-образная схема замещения четырехполюсника является эквивалентной схемой трансформатора, не содержащей индуктивных связей. Уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, для ее входного и выходного контуров:

$$\begin{cases} U_1 - j\omega M I_2 = I_1 R_1 + j\omega L_1 I_1; \\ -j\omega M I_1 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + U_2. \end{cases} \quad (33)$$

аналогичны таким же уравнениям (14), составленным для первичной и вторичной обмоток линейного трансформатора соответственно. В данной схеме замещения в ветви, содержащей только сопротивление взаимной индуктивности  $-j\omega M$ , протекает ток

$I_M = I_1 - I_2$ . Поэтому, комплексной мощности  $\tilde{S}_M$ , выделяющейся в данной ветви, соответствует выражение:

$$\tilde{S}_M = -j\omega M \begin{pmatrix} I_1 - I_2 \\ I_1 - I_2 \end{pmatrix}^* \quad (34)$$

Тогда, мощность  $\tilde{S}_{12M}$ , соответствующая взаимной магнитной энергии токов ( $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$ ), определяется выражением:

$$\tilde{S}_{M12} = j\omega M I_1 I_2 + j\omega M I_2 I_1. \quad (35)$$

Следовательно,  $R_{1M} > 0$ , а  $R_{2M} < 0$ , что соответствует передачи электромагнитной энергии посредством магнитного поля из первичной обмотки трансформатора во вторичную.

**Выводы.** Полученная эквивалентная схема замещения трансформатора с устраненными индуктивными связями адекватна электромагнитным процессам, происходящим в трансформаторе. Ее использование упростит понимание электромагнитных процессов, протекающих в трансформаторе, и, следовательно, позволит повысить эффективность разработок электротехнических устройств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1984. — 559 с.
2. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т.1. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными. — М.: Энергия, 1972 — 240 с.
3. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Том 1. Теория линейных электрических цепей. — Л.: Энергоиздат, 1981 — 536 с.
4. Придубков П. Я., Прогонный А. Н. Исследование эквивалентной схемы линейного трансформатора с устраненными индуктивными связями // Збірник наукових праць. — Вип. 57. — УкрДАЗТ, 2004. — С. 260-234.
5. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1986. — 263 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 616 с.
7. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 3. Теория электромагнитного поля. — М.: Энергия, 1969. — 352 с.
8. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. Страхов С. В. Основы теории цепей. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 528 с.

Стаття надійшла 01.02.07  
Рекомендована до друку д. т. н., проф.  
Чорним О. П.