УДК 378.02:53:519.25

ДЕМОНСТРАЦІЯ СТАТИСТИЧНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ В КУРСІ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Єлізаров О.І., д.ф-м.н., проф., Закатнов М.В., ас.
Кременчуцький державний політехнічний університет ім. М. Остроградського
39614, Кременчук, вул. Першотравнева, 20
E-mail: fizika@polytech.poltava.ua

Описаны новые вариации лекционных демонстраций с использованием доски Гальтона с целью углубления понимания статистических закономерностей в задачах многих тел, рассмотрены необходимые условия и общий механизм установления статистического распределения в данных системах. Эксперименты с доской Гальтона дают возможность получить тонкую структуру распределений в случае рассеяния частиц на регулярной решетке, что можно использовать в лекционных демонстрациях как аналогию принципов дефектоскопии. На примере рассеяния частиц при их соударениях с упорядоченной и хаотичной структурами смоделированы проявления латентного порядка в хаотических процессах.

Ключевые слова: статистика, распределение Максвелла, вероятность, доска Гальтона.

In this work the described new variations of demonstrations of lectures with the use of board of Galton with the purpose of deepening of understanding of statistical conformities to the law in the tasks of many bodies.On the example of dispersion of particles at their hittings with well-organized and chaotic structures the displays of latent order are modelled in wholly chaotic processes.

Keywords: statistics, distributing of Maxwell, probability, board of Galton.

Вступ. Добре відомо, що зародження молекулярно-кінетичної теорії (МКТ) пов′язане зі спробами перенести закони класичної механіки на рух окремо взятої частинки в оточенні величезної кількості подібних їй частинок.

Неминучі математичні труднощі розв′язування багаточастинкової задачі змусили вдатися до суттєвого її спрощення. Так, при підрахунках тиску ідеального газу, молекулам приписували однакову швидкість, нехтували взаємодією між ними, а враховували лише передачу імпульса стінці посудини.

Тож розв′язування задачі зводилося фактично до застосування законів руху і збереження до однієї частинки, а отриманий результат потім перемножувався на загальне число учасників руху.

Ще у першій половині XIX сторіччя фізики інтуїтивно відчували, що поведінка термодинамічної системи лише частково відтворює якість механічного руху, притаманну одиничним тілам, відчували, що система колосального числа учасників руху породжує якісно нові закономірності, які не можуть бути отримані навіть тоді, коли б ми змогли розв'язати систему кінематичних рівнянь, записаних для кожної частинки. Причиною того є втрата детермінізму в актах взаємодії елементів термодинамічної системи, обумовленої ймовірнісним характером результату зіткнення [1,2]. Останній може бути врахований лише статистично, що і було вперше зроблено Максвелом.

Мета роботи. Описати нові варіації лекційних демонстрацій з використанням дошки Гальтона, які суттєво поглиблюють розуміння статистичних закономірностей в задачах багатьох тіл. Полегшити сприйняття сутності статистичних законів на їх якісному рівні під час аналізу як гіпотетичних розподілів, так і пов'язаних із фізичними системами.

Матеріал і результати досліджень. Як приклад наведемо статистичний розподіл грошей у певних сукупностях людей. Для спостереження візьмемо дві великі однакові групи людей – пігмеїв та гігантів. Поселимо кожну групу ізольовано на два острови і наділимо кожного з островитян однаковою сумою грошей. Описаний стан будемо вважати початковим. Побудуємо функції початкового розподілу грошей в кишенях мешканців островів $f_п$ та $f_г$ і прослідкуємо їх часові зміни. Початковий розподіл грошей у кожній з груп за умовою буде однаковим, і його графічно відтворює δ-функція, зміст якої в тому, що з імовірністю "1" в кишені кожного пігмея і в кишені кожного гіганта ми знайдемо початкову суму, а будь-яку іншу суму – з імовірністю "0" (рис. 1а).

Дозволимо тепер учасникам нашого гіпотетичного експерименту вступити у торгівельні відносини, що буде рівнозначно актам взаємодії елементів термодинамічної системи. Життєвий досвід нам підкаже, що через певний час рівність розподілу капіталу буде порушена (рис. 1б). Імовірність знайти будь-яку суму грошей в кишені пігмея чи гіганта тепер не буде нульовою, хоча найбільш ймовірна сума $M_{н.й.}$ буде значно нижчою за початкову M_0:

$$M_{н.й.} << M_0 . \qquad (1)$$

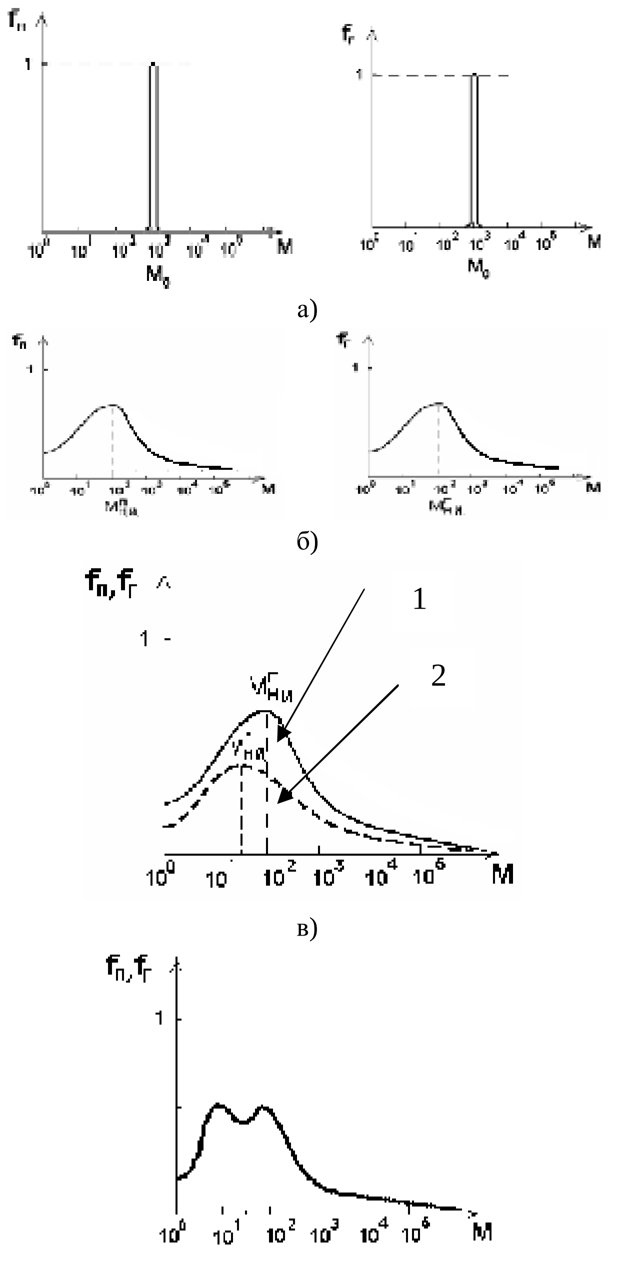


Рисунок 1 – Розподіли грошей в групах: а) початковий розподіл грошей у гігантів та пігмеїв; б) розподіли грошей під час торгівельних відносин у групах; в) розподіли грошей під час торгівельних відносин між групами (1- у гігантів, 2- у пігмеїв); г) розподіл грошей без врахування належності істот до тієї чи іншої групи

Оскільки характер торгівельних відносин у пігмеїв і гігантів абсолютно однаковий, то розподіли грошей по кишенях одних і других будуть співпадати (рис. 1б) і залишатимуться такими нескінченно довго.

Дозволимо пігмеям та гігантам торгувати між собою, не скасовуючи попередніх торгівельних стосунків. Зрозуміло, що дані стосунки не можуть бути рівноправними. Через певний час частина грошей з кишень пігмеїв опиниться в кишенях гігантів. Розподіли грошей по кишеням пігмеїв і гігантів не будуть тепер співпадати між собою, і такий стан буде залишатися як завгодно довго, якщо в стосунках не буде ніяких змін (рис. 1в).

Якщо тепер побудувати розподіл грошей по кищеням островитян без огляду на те, чия то кишеня – пігмея чи гіганта, – то отримаємо криву розподілу, представлену на рис. 1г. Вона являє собою суму кривих розподілу, взятих із рис. 1б, поділену пополам (адже число учасників грошового обміну збільшилося вдвічі). Вид кривої свідчить про складний механізм взаємодії учасників досліду: пігмеї з пігмеями, гіганти з гігантами, пігмеї з гігантами.

Вже на цьому гіпотетичному досліді можна визначити необхідні умови і загальний механізм встановлення статистичного розподілу в системі багатьох тіл:

1. Система, завдяки зовнішнім впливам, може перебувати в нерівноважному стані і мати специфічний для такого стану розподіл. Цій тезі відповідають розподіли на рис. 1а та 1б.
2. Будучи залишеною самою по собі, система релаксує за певний час до рівноважного стану, після чого статистичний розподіл залишається незмінним у часі (рис. 1б-1г).
3. Характер статистичного розподілу визначається механізмом взаємодії між елементами системи. Однаковому механізму будуть відповідати однакові розподіли (рис. 1в, г).
4. Зміна механізму взаємодії призведе до зміни розподілу (рис. 1г).
5. Необхідною умовою виникнення статистичної закономірності є велике число взаємодіючих елементів і, нарешті, наслідки взаємодії (в нашому випадку результати торгівельних угод) повинні мати імовірнісний характер.

Можливості для аудиторної демонстрації статистичних закономірностей, які існують в світі атомів і молекул, обмежений через відомі технічні труднощі. В цьому відношенні вигідно виділяється дошка Гальтона, яка дозволяє легко на очах у студентів отримати статистичний розподіл, який за певних умов може бути математично описаний функцією, близькою до нормального розподілу, або функцією Максвела розподілу газових молекул за швидкостями в одному з напрямків руху.

Нагадаємо класичний варіант використання дошки Гальтона. Прямокутний ящик внизу розділено на ряд комірок (рис. 2). Над комірками розташована система металевих штирків. Через лійку на штирки сиплеться пісок або якісь інші дрібні частинки. Вдаряючись об штирки, частинки відхиляються вбік, і через випадковість характеру ударів попадають в різні комірки. Якщо багаторазово повторювати дослід, спостерігаючи за однією "міченою" частинкою, то можна виявити, що вона в різних дослідах попадає в різні комірки. Проте, в просторовому розподілі частинок по коміркам буде спостерігатися незалежна від номера досліду цілком певна закономірність. Цей результат наочно свідчить, що в хаотичності руху прихована певна закономірність.

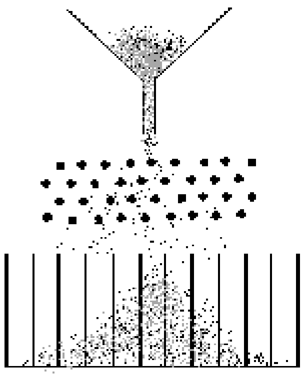


Рисунок 2 – Схема роботи дошки Гальтона

Узагалі ця закономірність не обов'язково повинна описуватись функцією Максвела. В дослідах із розсіюванням частинок при їх падінні необхідно витримати ряд умов для того, щоб таке співпадання мало місце. Експерименти, проведені нами з дошкою Гальтона, дозволили окреслити ці умови. По-перше, умова пружної взаємодії падаючих частинок зі штирками дошки. Ми використовували частинки абразивного порошку. Він не налипав на штирки, отже, можна вважати взаємодію порошинок зі штирками пружною. По-друге, параметром розподілу Максвела за швидкостями руху газових молекул є температура газу, яка повинна бути сталою для всього об´єму. В наших дослідах аналогом такого параметру виступає висота падіння порошинок. Саме їх кінетична енергія у вертикальному напрямку формує при актах розсіювання найбільш імовірну швидкість в напрямку X і, врешті решт, всю криву розподілу (рис. 3).

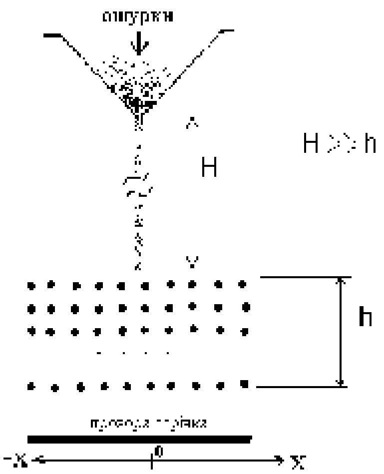


Рисунок 3 – До умови «постійної температури газу»

Оскільки рух частинок на дошці Гальтона навідміну від руху газових молекул, розглянутого Максвелом, відбувається в силовому полі і порошинки, проходячи поле штирків, "підігріваються", то наближенням "постійної температури" тут буде умова h << H, де h - висота поля штирків, H - висота падіння частинок (рис. 3).

Третьою умовою повинна бути умова повної хаотизації руху в напрямку X усіх падаючих частинок. Фізично це означає, що кожна з них повинна хоча б один раз зіткнутися зі штирком. Зіткнення їх між собою через малість їх власних розмірів є малоймовірним. У зв´язку з цим необхідно взяти до уваги досить суттєву відмінність між хаотизацією руху газових молекул і хаотизацією порошинок на дошці Гальтона. Справді, якщо перша є наслідком взаємодії рухомих молекул між собою, то в нашому випадку хаотизація руху частинок породжується їх взаємодією з ансамблем нерухомих розсіюючих центрів (штирків). Апріорі можна очікувати, що вказана відмінність може вплинути на характер розподілу і що, скоріш за все, відчути це можна, розсіюючи частинки на регулярних гратках штирків. Традиційна індикація розподілу частинок на дошці Гальтона через підрахунок їх кількості в комірках є незручною при проведенні лекційних демонстрацій. Окрім того, вона не дозволяє зареєструвати тонку структуру розподілу частинок, мова про яку піде нижче. Тому в наших дослідах комірки були замінені прозорою стрічкою, вкритою тонким шаром оливи. Частинки абразиву, прилипаючи до стрічки після розсіювання, зменшували прозорість стрічки пропорційно їх поверхневій щільності (рис. 4). Це дозволяє продемонструвати розподіл у тіньовій проекції, а також кількісно обробити його за допомогою комп´ютерної програми.

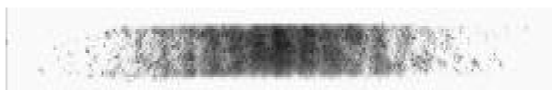


Рисунок 4 – Одна з картин розподілу ошурок на стрічці в тіньовій проекції

Виконані нами досліди показали, що розподіл розсіяних штирками частинок вздовж координати X відповідає функції Максвела лише за умови нерегулярної гратки штирків. Такі гратки ми виготовили, використовуючи масив координат штирків, отриманий за допомогою генератора випадкових чисел. На рис. 5 представлена одна з таких граток. Густина штирків виключала пряме протікання частинок через гратку без розсіювання. На рис. 6 представлені розподіли розсіяних частинок при падінні їх на гратку з різної висоти.

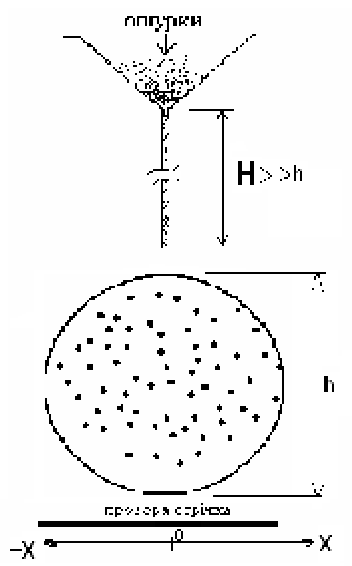


Рисунок 5 – Макет дошки Гальтона з полем хаотичних штирків. Масштаб поля 1:4

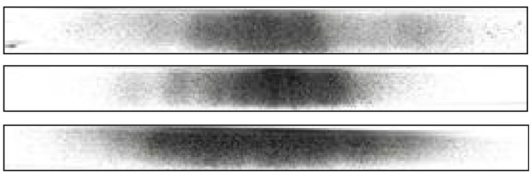
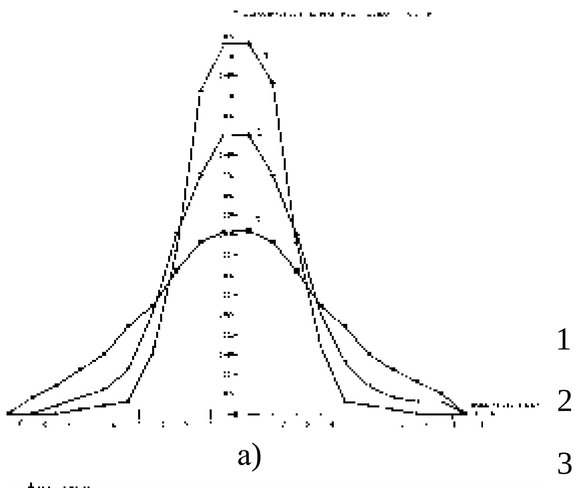


Рисунок 6 – Розподіли ошурок (у тіньовій проекції) на хаотичному полі штирків залежно від висоти падіння H (1- висота 180 мм., 2 - 400 мм., 3 - 600 мм.)

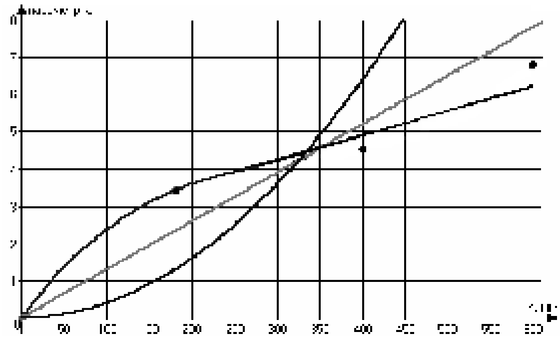
Усі три криві чудово описуються залежністю

$$f = \frac{1}{pa} \cdot \exp(-\frac{x^2}{a^2}), \qquad (2)$$

тобто функцією Максвела, де параметр a для всіх кривих визначався нами зі значення f при $x=0$ за експериментальними даними (рис. 7а). Як і в розподілі Максвела, в наших дослідах параметр a (з точністю до геометричних коефіцієнтів) відображає найбільш імовірну швидкість розсіяних частинок $u^{н.і.}$. Як відомо, для газових молекул величина $u^{н.і.} \sim \sqrt{T}$. У нашому випадку параметр a повинен бути $\sim \sqrt{H}$, бо "температуру" розсіюваних частинок задає їхня початкова потенціальна енергія. Рис. 7б, який відображає зміни параметру розподілу a залежно від висоти падіння частинок, підтверджує сказане.



а)



б)

Рисунок 7 – а) Розподіли як результат прямих підрахунків лінійної густини частинок вздовж стрічки. Параметр кривих- висота падіння H: 1- 180 мм, 2- 400 мм, 3- 600 мм. Загальна кількість частинок близько 200. Відрахунок довжини стрічки ведеться з її центра. б) Залежність параметра розподілу "а" від висоти падіння ошурок. Експериментальні точки a_i для трьох висот H належать кривій типу $a \sim \sqrt{H}$. Будь-які інші криві ($\sim H^2$ та $\sim H$) не відповідають дійсності

Принципово інші розподіли виникають при розсіюванні частинок регулярними гратками (рис. 8). Вони нагадують інтерференційні картини, що виникають при взаємодії світла з дифракційними гратками або рентгенівських променів чи електронів з гратками кристалів, хоча природа подібних розподілів, звичайно, інша. Модуляція отриманих в наших дослідах розподілів обумовлена періодичністю вільних і закритих для руху частинок шляхів, сформованих штирками гратки. Їх період визначається періодом гратки в напрямку X (рис. 9а,б). Коли симетрія гратки відносно вертикалі порушується (при кутах падіння, наприклад, $\varphi=21^0$, 77^0, 59^0 на рис. 10), весь розподіл зсувається ліворуч чи праворуч залежно від положення ліній гратки. Одержані результати дозволяють зробити принципово важливий висновок: хаотизовані регулярними утвореннями потоки частинок в своєму просторово-енергетичному розподілі в тій чи іншій формі зберігають інформацію стосовно структури розсіюючих їх об´єктів (період модуляції, втрата симетрії відносно напряму руху). Більш того, дефекти гратки теж відбиваються на характері розподілу. Про це свідчать розподіли частинок, отримані при розсіюванні на регулярних гратках, в які ми свідомо вносили дефекти. Так, дефектна область гратки викликає втрату тонкої структури розподілу (рис. 11).

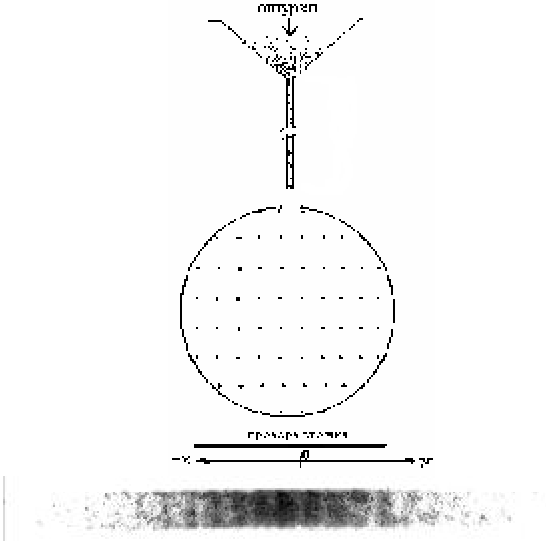
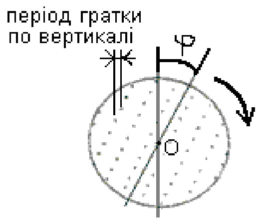
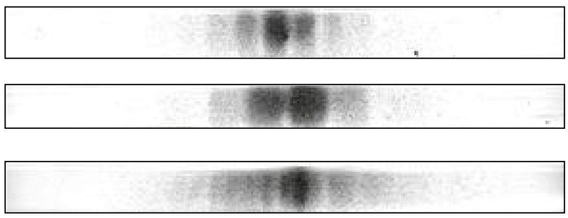


Рисунок 8 – Прояв тонкої структури в розподілі ошурок на регулярній гратці та її макет (період гратки 11 мм)



а)

в



б)

Рисунок 9 – а) Схема отримання розподілів в залежності від кута падіння ошурок на гратку. Гратка обертається навколо т.О. Пряма “в” - напрям відліку кута. При збільшенні повороту гратки її період в напрямі вертикалі зменшується. б) - Модуляція розподілів при різних кутах падіння на гратку (зверху вниз кути φ відповідно рівні 0^0, 90^0, 45^0 відносно вертикалі)

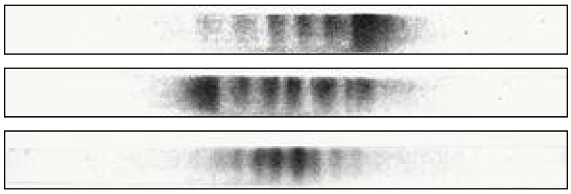
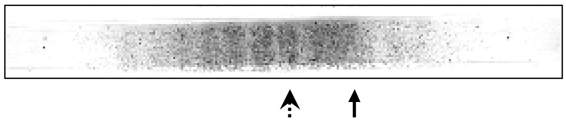
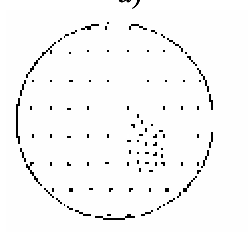


Рисунок 10 – Порушення симетрії розподілу при деяких кутах падіння ошурок на гратку (зверху вниз кути відповідно 21^0, 77^0, 59^0)



а)



б)

Рисунок 11 – а) Розподіли ошурок на гратках з дефектами : ряд штирків згущено справа відносно напряму падіння ошурок на штирки (показано суцільною стрілкою); центр малюнка відповідає центру стрічки з ошурками (пунктирна стрілка). б) - Макет поля штирків з «дефектом»

Висновки. Модифіковані досліди з дошкою Гальтона дозволяють чітко окреслити умови, за яких розподіл розсіяних частинок відповідає нормальному розподілу або функції Максвела, а також отримати тонку структуру розподілу в разі розсіювання частинок на регулярній гратці штирків, що з певними омовками можна використати в лекційних демонстраціях як аналог явищ дифракції електронів на гратках кристалів та принципів дефектоскопії. На прикладі розсіювання частинок при їх співударах із впорядкованою та хаотичною структурами змодельовано зв´язок категорій випадковості та закономірності в хаотичних системах та прояви латентного порядку в цілком хаотичних процесах; продемонстровано вплив на еволюцію статистичних систем початкових умов, що суттєво поглиблює розуміння статистичних закономірностей в задачах багатьох тіл і полегшує сприйняття студентами сутності статистичних законів.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смородинский Я.А. Температура. - М.: Наука, 1987. - 190 с.

2. Телеснин Р.В. Молекулярная фізика. - М.: Высшая школа, 1985. - 296 с.

Стаття надійшла 15.11.2007.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Шмандієм В.М.