УДК 621.3.01

ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ МАГНИТНЫХ СРЕД И ХАРАКТЕРИСТИКИ НАМАГНИЧЕННОГО ТЕЛА

Придубков П.Я., к.т.н., доц.
Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, г. Харьков
61003, г. Харьков, пер. Фейербаха, 7
Синчук О.Н., д.т.н., проф.
Кременчугский государственный политехнический университет
имени Михаила Остроградского
39614, г. Кременчуг, ул. Первомайская, 20
E-mail:saue@ polytech.poltava.ua

Отриманий аналітичний вираз для опису першого закону Кирхгофа в диференціальній формі. Встановлена залежність напруженості магнітного поля від вектора намагніченості і геометричних параметрів намагніченого тіла.

Ключові слова: магнітний ланцюг, напруженість, магнітна індукція.

In the article analytical expression is got for description of the first law of Kirkhgofa in a differential form. Dependence of tension of the magnetic field is set on the vector of magnetized and geometrical parameters of the magnetized body.

Key words: magnetic chain, tension, magnetic induction.

Введение. Во многих электротехнических устройствах, принцип действия которых основан на законе электромагнитной индукции, в трансформаторах, электрических машинах, магнитных элементах вычислительной и информационно-измерительной техники для увеличения магнитного потока в определенной части пространства используют, как правило, ферромагнитные материалы [1].

Методы расчета магнитопроводов данных устройств, используемые при их проектировании, основаны на законах Ома и Кирхгофа для магнитных цепей в интегральной форме [2]. Однако все магнитные цепи, в том числе и неразветвленные, имеющие сравнительно небольшие размеры, относятся к цепям с распределенными параметрами, у которых закон распределения магнитного потока заранее не известен. Влияние окружающей среды существенно усложняет картину магнитного поля, сближая тем самым задачу расчета магнитной цепи с задачей расчета магнитного поля.

Поэтому, исследование аналитических зависимостей основных величин, характеризующих магнитное поле, и установление законов Ома и Кирхгофа в дифференциальной форме для магнитных цепей являются весьма актуальными задачами.

Цель работы. Исследование и определение аналитических зависимостей параметров магнитного поля, создаваемого намагниченным массивным телом для повышения эффективности функционирования устройств, базирующих на использовании закона электромагнитной индукции.

Материал и результаты исследований. Совокупность ферромагнитных или каких-либо иных тел (сред), по которым замыкается магнитный поток, создаваемый источником МДС (катушками с током), является магнитной цепью [2]. Процессы, протекающие в магнитной цепи, и состояния конечных ее участков характеризуют законы Ома и Кирхгофа для магнитной цепи в интегральной форме. Эти законы применимы для магнитного потока Φ, магнитодвижущей силы F и магнитного напряжения U_M.

Магнитную цепь можно моделировать эквивалентной электрической цепью, т.к. уравнения, описывающие состояния магнитной цепи, аналогичны уравнениям, описывающим состояния нелинейной электрической цепи, если принять следующие соответствия [2]: аналогом электродвижущей силы (ЭДС) является магнитодвижущая сила (МДС), аналогом электрического тока − магнитный поток, аналогом электрического напряжения − магнитное напряжение.

В результате весьма большого различия удельной проводимости $\gamma_{пр}$ проводников, из которых может быть составлена электрическая цепь, и удельной проводимости $\gamma_{из}$ окружающей проводники изолирующей среды удается создать весьма протяженные направленные пути для электрического тока (при этом $\frac{\gamma_{пр}}{\gamma_{из}} \approx 10^{20}$).

Магнитная цепь, хотя и составляется из отдельных ферромагнитных участков, в большей или меньшей степени включает и окружающую среду (воздушные зазоры). В воздушных зазорах образуется магнитное поле рассеяния, т.к. для магнитных цепей не имеет место столь большое различие между абсолютной магнитной проницаемостью ($\mu_{фер}$) ферромагнитных участков магнитной цепи и абсолютной магнитной проницаемостью окружающей среды (воздуха). Обычно $\frac{\mu_{фер}}{\mu_o} \approx 10^3 \div 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньшим, то в воздухе создаются параллельные пути прохождения магнитного потока с большими магнитными сопротивлениями.

Таким образом, даже при коротких магнитных цепях, которые, как правило, имеют сравнительно небольшие размеры и небольшое число ветвей и узлов, магнитные цепи являются цепями с распределенными параметрами, причем, закон распределения магнитного потока по длине того или иного участка магнитной цепи заранее не известен. Участки магнитной цепи могут отличаться разнообразием параметров и характеристик, обусловленных различием химического состава материала, технологией его производства, условиями термической или механической обработки и т.д. [3].

Все сказанное весьма усложняет расчеты магнитных цепей методами, основанными на законах Ома и Кирхгофа в интегральной форме, даже при постоянном магнитном потоке, т.е. при постоянном токе в намагничивающих катушках. Точный расчет здесь может быть выполнен с привлечением методов теории электромагнитного поля.

Таким образом, более подробный, детальный анализ явлений, происходящих в магнитной цепи в реальных условиях с учетом влияния окружающей среды, возможен только при использовании аналитических зависимостей, описывающих процессы, происходящие в магнитной цепи в дифференциальной форме.

Магнитный поток − поток вектора магнитной индукции через некоторую поверхность $\Phi = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S}$ [2]. Если поверхность замкнута сама на себя, то, как показывает опыт, вошедший внутрь любого объема магнитный поток равен магнитному потоку, вышедшему из того объема:

$$\Phi = \oint\limits_S \vec{B}d\vec{S} = 0\,. \tag{1}$$

Данное выражение представляет собой математическую запись принципа непрерывности магнитного потока, который является первым законом Кирхгофа в интегральной форме для магнитных сред.

Если разделить левую и правую части последнего выражения на объем V, находящийся внутри замкнутой поверхности S, и найти предел отношения, когда объем стремится к нулю, то данное равенство остается справедливым:

$$\lim_{V \to 0} \frac{\int\limits_S \vec{B}d\vec{S}}{V} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0\,. \tag{2}$$

Полученное выражение можно трактовать как дифференциальную форму математической записи первого закона Кирхгофа для магнитных сред. Оно означает, что в любой точке магнитного поля нет ни стоков, ни истоков линий вектора $\vec{B}$ магнитной индукции, т.е. линии вектора $\vec{B}$ нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые на себя линии.

Дифференциальная форма первого закона Кирхгофа позволяет получить выражение, описывающее напряженность $\vec{H}$ магнитного поля намагниченного массивного тела, через вектор его намагниченности $\vec{J}$ [4], распределение которой в объеме тела известно, а вне его всюду отсутствует.

Вне намагниченного тела поле напряженности $\vec{H}$ идентично полю магнитной индукции $\vec{B}$, т.к. $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$, но $\vec{J} = 0$. Внутри магнитной среды линии индукции продолжаются непрерывно, поскольку $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, то $\vec{B}$ не имеет истока, но зато имеет вихри там же, где и $\vec{J}$, − на боковой поверхности. Здесь линии $\vec{B}$ преломляются, однако условие $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ продолжает выполняться [4].

Если предположить, что $\vec{B} = \mu_a\vec{H}$ и $\mu_a = \mu_0\mu_r = \text{const}$ во всей области магнитного поля, то основные уравнения магнитного поля в условиях статики (в отсутствии токов) принимают вид [4]:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0\,; \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\mu_a\vec{H} = \mu_a \operatorname{div}\vec{H} = 0\,. \tag{4}$$

Так как дивергенция и ротор напряженности магнитного поля во всем пространстве равны нулю, то в нем нет ни источников, ни вихрей. Это значит, что сама напряженность поля тоже везде равна нулю. В магнитостатике можно получить поле только при наличии намагниченной среды, состояние которой определяется вектором намагниченности $\vec{J}$ [4], причем:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})\,. \tag{5}$$

В соответствии с ранее установленной дифференциальной формой первого закона Кирхгофа для магнитных сред

$$\operatorname{div}\vec{B} = \operatorname{div}\mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = 0\,. \tag{6}$$

Тогда,

$$\operatorname{div}\mu_0\vec{H} + \operatorname{div}\mu_0\vec{J} = 0\,. \tag{7}$$

Преобразовав (7), получим:

$$\mathrm{div}\vec{H} = -\mathrm{div}\vec{J}\,. \qquad (8)$$

Если намагниченность $\vec{J}$ существует в отсутствии электрических токов, то магнитное поле создается именно намагниченностью. В условиях магнитостатики магнитное поле безвихревое и, поэтому, вектор напряженности $\vec{H}$ может быть определен как градиент скалярной функции магнитного потенциала φ_m [5]:

$$\vec{H} = -\mathrm{grad}\varphi_m\,. \qquad (9)$$

После подстановки значения вектора $\vec{H}$ в уравнение (8) получим:

$$\mathrm{div}(-\mathrm{grad}\varphi_m) = -\mathrm{div}\vec{J}\,. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\nabla^2\varphi_m = \mathrm{div}\vec{J}\,. \qquad (11)$$

Таким образом, чтобы определить φ_m, необходимо решить уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dz^2} = \mathrm{div}\vec{J}\,. \qquad (12)$$

Эта задача решается с помощью теоремы Грина, применимой к объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S [6]:

$$\varphi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\varphi_m}{r}dV - -\frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\varphi_m \frac{d}{dn}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{d\varphi_m}{dn}\right)ds\,, \qquad (13)$$

где r - расстояние от заданной точки пространства до некоторой произвольно выбранной начальной точки.

Так как на поверхности S' раздела намагниченного тела и окружающей его среды отсутствует поверхностный ток и равны нормальные составляющие векторов магнитной индукции $\vec{B}$, то при переходе через граничные поверхности функция магнитного потенциала φ_m изменяется непрерывно, а ее производная $\frac{d\varphi_m}{dn}$ - $\mathrm{grad}\varphi_m$ или $\vec{H}$ - претерпевает разрыв [4]. В этом случае теорема Грина применима при условии, что поверхность S' может быть выделена из исследуемого объекта с помощью плотно охватывающей ее замкнутой поверхности S_0' (рис. 1), причем, на обеих сторонах поверхности S' положительные нормали направлены к данной поверхности разрыва, поэтому справедливо выражение:

$$\frac{d}{dn_1}\frac{1}{r} = -\frac{d}{dn_2}\frac{1}{r}\,. \qquad (14)$$

Следовательно,

$$\oint_{S_0'} \varphi_m \frac{d}{dn}\frac{1}{r}dS = \int_{S'} \varphi_m \left(\frac{d}{dn_1}\frac{1}{r} + \frac{d}{dn_2}\frac{1}{r}\right)dS = 0\,. \qquad (15)$$

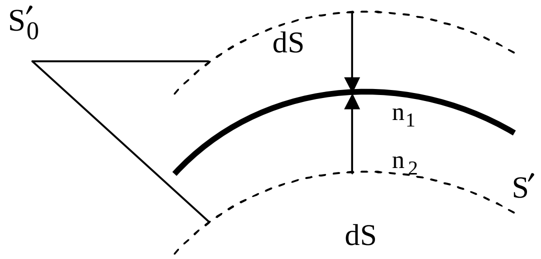

Рисунок 1 – К применению теоремы Грина

Окончательное выражение функции магнитного потенциала φ_m, если внешняя, ограничивающая рассматриваемое пространство поверхность S уходит в бесконечность, приобретает вид [6]:

$$\varphi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\varphi_m}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi_m}{dn_1} + \frac{d\varphi_m}{dn_2}\right)dS\,. \qquad (16)$$

Учитывая, что $\vec{H} = -\mathrm{grad}\varphi_m$, откуда $\Delta\varphi_m = \mathrm{divgrad}\varphi_m = -\mathrm{div}\vec{H}$, а $\frac{d\varphi_m}{dn_1} = -H_{1n}$, $\frac{d\varphi_m}{dn_2} = -H_{2n}$, имеем:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\mathrm{div}\vec{H}}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\int_s \frac{H_{1n} + H_{2n}}{r}dS\,. \qquad (17)$$

Принимая во внимание, что $\mathrm{div}\vec{H} = -\mathrm{div}\vec{J}$, а также известное условие непрерывности нормальных составляющих вектора магнитной индукции (поскольку $\mathrm{div}\vec{B} = 0$), выражение для магнитного потенциала φ_m приобретает вид [4]:

$$\varphi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\mathrm{div}\vec{J}}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{J_{1n} + J_{2n}}{r}dS\,. \qquad (18)$$

Так как согласно [8]:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}=\frac{\operatorname{div}\vec{J}}{r}+\vec{J}\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \qquad (19)$$

то

$$\int_V \frac{\operatorname{div}\vec{J}}{r}dV=\int_V \operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}dV-\int_V \vec{J}\operatorname{grad}\frac{1}{r}dV, \qquad (20)$$

где интеграл берется по всей поверхности.

Первый интеграл правой части последнего уравнения может быть преобразован с помощью теоремы Гаусса – Остроградского. В соответствии с данной теоремой нужно взять поверхностный интеграл от $\frac{\vec{J}}{r}$, во-первых, по поверхности, уходящей в бесконечность (этот интеграл равен нулю, т.к. в бесконечности и напряженность поля, и намагниченность обращаются в нуль), а во-вторых, по тем поверхностям, которые охватывают область разрыва вектора $\vec{J}$.

Поэтому,

$$\int_V \operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}dV=\int_S \frac{J_{1n}+J_{2n}}{r}dS. \qquad (21)$$

Подставляя выражения (18) и (19) в уравнение (16), получаем:

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{J}\operatorname{grad}\frac{1}{r}dV. \qquad (22)$$

В соответствии с дифференциальными операциями над скалярами и векторами, образованными из радиуса-вектора $(\vec{r})$ и свободных векторов, получим:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}=-\frac{(\vec{J}\vec{r})}{r^3}, \qquad (23)$$

а

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}. \qquad (24)$$

Поэтому,

$$\int_V \vec{J}\operatorname{grad}\frac{1}{r}dV=\int_V \operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}dV. \qquad (25)$$

Тогда,

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{div}\frac{\vec{J}}{r}dV. \qquad (26)$$

Следовательно,

$$\vec{H}=-\operatorname{grad}\varphi_m=-\frac{1}{4\pi}\int_V \operatorname{graddiv}\frac{\vec{J}}{r}dV. \qquad (27)$$

Однако, с учетом [8]:

$$\operatorname{graddiv}\frac{\vec{J}}{r}=-\frac{\vec{J}}{r^3}+\frac{\vec{r}\,3(\vec{J}\vec{r})}{r^5}. \qquad (28)$$

Поэтому,

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int_V\left(\frac{\vec{J}}{r^3}-\frac{\vec{r}\,3(\vec{J}\vec{r})}{r^5}\right)dV. \qquad (29)$$

Выводы. Полученное выражение для первого закона Кирхгофа в дифференциальной форме, необходимое для применения методов теории электромагнитного поля, позволяет установить аналитическую зависимость напряженности магнитного поля, создаваемого намагниченным телом, от его вектора намагниченности и геометрических параметров, что может быть использовано при проектировании устройств, принцип действия которых основан на законе электромагнитной индукции, с целью повышения эффективности их функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брускин Д.Э., Зохорович А.Е., Хвостов В.С. Электрические машины. - М.: Высшая школа, 1987.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2000.
3. Теоретические основы электротехники. Том. II. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля/ Под ред. П.А Ионкина. – М.: Высшая школа, 1976. – 383 с.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. –773 с.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1986. – 263 с.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия, 1969. – 352 с.
8. Маделунг Э. Математический аппарат физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 618 с.

Стаття надійшла 15.01.2008 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Чорним О.П.