

УДК 621.01

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ВИНТОВОГО БРУСА КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ
ДЛЯ РАСЧЕТА СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Дериенко А.И., к.т.н., доц., Король С.А., к.т.н., доц.,
Кременчугский государственный политехнический университет
имени Михаила Остроградского

39614, г.Кременчуг, ул.Первомайская,20.

E-mail: kvm@polytech.poltava.ua

Григорьев А.А.,

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

35600, г.Харьков, пр.Свободы,4.

E-mail: agrig@kpi.kharkov.ua

Досліджено вплив індексу пружини на її спектр власних частот. Знайдено причини появи пар близьких власних частот у спектрі частот циліндричної пружини стискання. Проаналізовані геометричні параметри самої пружини, для яких є можливість використовувати спрощені моделі, що враховують 3 степені свободи.

Ключові слова: циліндричні пружини стискання, математичне моделювання механічних систем, матрична форма рівнянь, динамічний аналіз.

Influence of index of spring is studied on its spectrum of own frequencies. Reasons of appearance of pair of near own frequencies are unsealed in the spectrum of cylindrical spring of compression. The geometrical parameters of spring, for which it is possible to use the simplified models, are analyzed.

Keywords: cylindrical springs of compression, mathematical design of the mechanical systems, matrix form of equalizations, dynamic analysis.

Введение. Современный этап развития техники отличает переход к выпуску высокотехнологичной и наукоёмкой продукции. В дизелестроении это в первую очередь относится к производству топливной аппаратуры, от совершенства которой в определяющей степени зависят экономические и экологические показатели двигателя. Микронные допуски, использование высокопрочных материалов, предельная динамичность и ранее отличали топливные системы от других узлов дизеля и требовали привлечения современных методов для их динамического анализа и гидродинамического расчёта.

Анализ предыдущих исследований. Различные модели цилиндрических пружин, рассмотренные в [1-3], учитывают как 3, так и 6 степеней свободы сечения витка пружины. В публикации [2] в результате моделирования собственных колебаний пружины были обнаружены пары близких собственных частот, названные кластерами, но не объяснена причина их появления. Аналогичные результаты получены в целом ряде экспериментов [4]. Новый подход, в котором используются продольные и поперечные составляющие колебания витка пружины, позволяет дать теоретическое обоснование этого явления, а также идентифицировать различные модели колебаний пружины для расчета ее спектра.

Цель работы. Объяснить причины появления пар близких собственных частот в спектре цилиндрической пружины сжатия, а также определить геометрические параметры самой пружины, для кото-

рых возможно использовать упрощенные модели, учитывающие 3 степени свободы.

Материал и результаты исследования. Систему уравнений, представленную в [3], удалось записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} M_x & \Theta \\ \Theta & M_y \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \begin{bmatrix} B & tg d \cdot \Delta \\ -tg d \cdot \Delta^T & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ F \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} C_x & \Theta \\ \Theta & C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \begin{bmatrix} B^T & -tg d \cdot \Delta \\ tg d \cdot \Delta^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

где X, Q - векторы-столбцы безразмерных деформаций и сил, отвечающих продольным колебаниям; Y, F - то же самое, но для поперечных колебаний;

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(4 \cdot c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(2 \cdot c^2) \end{bmatrix}; \quad M_y = \begin{bmatrix} 1/(4 \cdot c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C_x = \begin{bmatrix} (1+n)/(4 \cdot c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+n)/2 \end{bmatrix}; \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+n)/(4 \cdot c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(4 \cdot c^2) \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы B и Δ определяют взаимное влияние координат, относящихся к одной и к разным группам колебаний соответственно. Важно отметить, что вторая матрица влияния кососимметричная, т.е. $\Delta^T = -\Delta$.

Сила зв'язи между продольними и поперечними колебаннями пружини определяется величиной угла d .

Если принять $tg d = 0$, то система (1) распадается на 2 независимые части:

- систему уравнений для продольных колебаний -

$$M_x \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial q} - B \cdot Q; \quad (2)$$

$$C_x \cdot Q = \partial X / \partial q + B^T \cdot X;$$

- систему уравнений для поперечных колебаний -

$$M_y \cdot \partial^2 Y / \partial t^2 = \partial F / \partial q + B^T \cdot F; \quad (3)$$

$$C_y \cdot F = \partial Y / \partial q - B \cdot Y.$$

Чтобы подчеркнуть алгебраическое сходство этих систем, выполним следующее преобразование: обозначим $\partial^2 Y / \partial t^2 = Z$ и дважды проинтегрируем второе уравнение системы (3) по времени t . Тогда систему (3) можно переписать в виде:

$$C_y \cdot \partial^2 F / \partial t^2 = \partial Z / \partial q - B \cdot Z; \quad (4)$$

$$M_y \cdot Z = \partial F / \partial q + B^T \cdot F.$$

Система (4) аналогична системе (2). Но сходство оказывается ещё более полным, если учесть, что матрица M_y очень похожа на матрицу C_x , а матрица M_x очень похожа на матрицу C_y . Если при $c \gg 1$ коэффициент Пуассона n (условно) положить равным 1, то матрицы из указанных пар совпадают между собой.

Для получения характеристического уравнения пружины будем искать решение системы (2) в виде простой волны, имеющей частоту $i \cdot l$ и волновое число $i \cdot a$, где i - мнимая единица. Тогда эти величины будут удовлетворять системе:

$$\begin{cases} I^2 \cdot M_x \cdot X = a \cdot Q - B \cdot Q + tg d \cdot \Delta \cdot F, \\ C_x \cdot Q = a \cdot X + B^T \cdot X + tg d \cdot \Delta \cdot Y, \\ I^2 \cdot M_y \cdot Y = a \cdot F + B^T \cdot F + tg d \cdot \Delta \cdot Q, \\ C_y \cdot F = a \cdot Y - B \cdot Y + tg d \cdot \Delta \cdot X. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} I^2 \cdot M_x \cdot X = S \cdot Q + tg d \cdot \Delta \cdot F, \\ C_x \cdot Q = S_x \cdot X + tg d \cdot \Delta \cdot Y, \\ I^2 \cdot M_y \cdot Y = S^* \cdot F + tg d \cdot \Delta \cdot Q, \\ C_y \cdot F = S \cdot Y + tg d \cdot \Delta \cdot X. \end{cases}$$

где обозначено: $a \cdot I - B = S$, $a \cdot I + B^T = S_x$, причём при вещественных a : $S_x = -S^T$.

Здесь, как было показано в [3]:

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad S^* = \frac{1}{a \cdot (a^2 + 1)} \cdot \begin{pmatrix} a^2 + 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix},$$

I , a - безразмерные частота и волновое число; n - коэффициент Пуассона.

Заметим, что при условии $c \rightarrow \infty$ матрицы M_x и M_y вырождаются, но матрицы S и S_x всегда обратимы, например,

$$S_x^{-1} = \frac{1}{a \cdot (a^2 + 1)} \cdot ((a^2 + 1) \cdot I - a \cdot B^T + (B^T)^2).$$

Поэтому имеется возможность исключить из системы (5) неизвестные векторы X, F и получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (I^2 \cdot M_x \cdot S_x^{-1} \cdot C_x - S + tg^2 d \cdot \Delta \cdot S_x^{-1} \cdot \Delta) \cdot Q = tg d \cdot I^2 \cdot (M_x \cdot S_x^{-1} \cdot \Delta + \Delta \cdot S_x^{-1} \cdot M_y) \cdot Y \\ tg d \cdot (C_y \cdot S_x^{-1} \cdot \Delta + \Delta \cdot S_x^{-1} \cdot C_x) \cdot Q = (C_y \cdot S_x^{-1} \cdot I^2 \cdot M_y - S + tg^2 d \cdot \Delta \cdot S_x^{-1} \cdot \Delta) \cdot Y. \end{cases}$$

Рассмотрим систему (5) и соответствующее ей характеристическое уравнение 6-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

$$a_{11} = I^2 \cdot M_x \cdot S^* \cdot C_x - S + tg^2 d \cdot \Delta \cdot S^* \cdot \Delta,$$

$$a_{12} = I^2 \cdot M_x \cdot S^* \cdot tg d \cdot \Delta + tg d \cdot \Delta \cdot S^* \cdot I^2 \cdot M_y,$$

$$a_{21} = C_y \cdot S^* \cdot tg d \cdot \Delta + tg d \cdot \Delta \cdot S^* \cdot C_x,$$

$$a_{22} = I^2 \cdot C_y \cdot S^* \cdot M_y - S + tg^2 d \cdot \Delta \cdot S^* \cdot \Delta.$$

Будем считать, что индекс пружины $c = \infty$; для пружин со стандартным или большим индексом такое упрощающее допущение для нижней ветви характеристического уравнения вполне приемлемо (рис.1). Тогда матрицы инерционных коэффициентов M_x, M_y и коэффициентов жёсткости C_x, C_y упрощаются:

$$M_x = C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+n)/2 \end{bmatrix}.$$

В результате получаем следующие выражения для коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_{11} = \begin{pmatrix} -a^2 \cdot (a^2 + 1) - a^2 \cdot tg^2 d & -a \cdot I^2 & (1+n) \cdot I^2 \\ a \cdot (a^2 + 1) - a \cdot tg^2 d & a^2 \cdot (a^2 + 1) - (a^2 + 1) \cdot tg^2 d & -a \cdot (a^2 + 1) \\ 0 & a \cdot (a^2 + 1) & -a^2 \cdot (a^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = tg d \cdot I^2 \cdot \begin{pmatrix} a & 2a^2 + 1 & -a \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = tg d \cdot \begin{pmatrix} a & 2a^2 + 1 & -a(1+n) \\ 0 & a & -(1+n) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{22} = \begin{pmatrix} -a^2 \cdot (a^2 + 1) - a^2 \cdot tg^2 d & -a \cdot I^2 & I^2 \\ a \cdot (a^2 + 1) - a \cdot tg^2 d & a^2 \cdot (a^2 + 1) - (a^2 + 1) \cdot tg^2 d & -a \cdot (a^2 + 1) \\ 0 & a \cdot (a^2 + 1) & -a^2 \cdot (a^2 + 1) \end{pmatrix}$$

В определителе (6) 10 элементов из 36 являются нулевыми. Кроме того, многие элементы используют общие для них алгебраические выражения. Указанные обстоятельства позволяют понизить порядок определителя и упростить его запись.

К элементам третьего и шестого столбцов прибавляем соответствующие элементы второго и пятого столбцов, умноженные на число a . Затем последовательно раскрываем определитель по 3-ей и 6-ой строке, что позволяет понизить порядок определителя до 4-го:

$$\begin{vmatrix} -a^2 \cdot (a^2 + 1 + tg^2 d) & (1+n) \cdot I^2 - a^2 \cdot I^2 & a \cdot tg d \cdot I^2 & -2a^3 \cdot tg d \cdot I^2 \\ a \cdot (a^2 + 1 - tg^2 d) & -a \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^2 + 1 + tg^2 d) & 0 & tg d \cdot I^2 \cdot (a^2 - 1) \\ a \cdot tg d & a \cdot tg d \cdot (2a^2 - n) & -a^2 \cdot (a^2 + 1 - tg^2 d) & I^2 \cdot (1 - a^2) \\ 0 & tg d \cdot (a^2 - (1+n)) & a \cdot (a^2 + 1 - tg^2 d) & -a \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^2 + 1 + tg^2 d) \end{vmatrix}$$

Первая из поставленных целей достигнута. Осталось придать выражениям для элементов определителя более компактную форму. Для этого элементы первой строки разделим, а элементы первого и второго столбца и четвертой строки умножим на число a :

$$\begin{vmatrix} -a^2((a^2+1)+tg^2d) & (1+n) \cdot I^2 - a^2 \cdot I^2 & tg^2d \cdot I^2 & -2a^2 \cdot tg^2d \cdot I^2 \\ a^2((a^2+1)-tg^2d) & -a^2(a^2+1)(a^2+1+tg^2d) & 0 & tg^2d \cdot I^2 \cdot (a^2-1) \\ a^2 \cdot tg^2d & a^2 \cdot tg^2d(2a^2-n) & -a^2((a^2+1)+tg^2d) & I^2 \cdot (1-a^2) \\ 0 & a^2 \cdot tg^2d(a^2-1+n) & a^2((a^2+1)-tg^2d) & -a^2(a^2+1)(a^2+1+tg^2d) \end{vmatrix}$$

Далее элементы первого и третьего столбца разделим на выражение $a^2 \cdot (1+a^2)$:

$$\begin{vmatrix} -1 \frac{1}{(a^2+1)} \cdot tg^2d & (1+n) \cdot I^2 - a^2 \cdot I^2 & \frac{1}{a^2(a^2+1)} \cdot tg^2d \cdot I^2 & -2a^2 \cdot tg^2d \cdot I^2 \\ 1 \frac{1}{(a^2+1)} \cdot tg^2d & -a^2(a^2+1)(a^2+1+tg^2d) & 0 & tg^2d \cdot I^2 \cdot (a^2-1) \\ \frac{1}{(a^2+1)} \cdot tg^2d & a^2 \cdot tg^2d(2a^2-n) & -1 \frac{1}{(a^2+1)} \cdot tg^2d & I^2 \cdot (1-a^2) \\ 0 & a^2 \cdot tg^2d(a^2-1+n) & 1 \frac{1}{(a^2+1)} \cdot tg^2d & -a^2(a^2+1)(a^2+1+tg^2d) \end{vmatrix}$$

После замены $\frac{tg^2d}{1+a^2} = z^2$, $\frac{1}{1+a^2} = x$, $\frac{I^2}{a^2(1+a^2)} = y^2$:

$$\begin{vmatrix} -1-z^2 & \left(\frac{2+n}{x^2}-1\right)y^2 & \frac{z}{x}y^2 & \frac{z}{x}\left(2-\frac{2}{x^2}\right)y^2 \\ 1-z^2 & -1-z^2 & 0 & -\frac{z}{x}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)y^2 \\ zx & zx\left(2-\frac{2+n}{x^2}\right) & -1-z^2 & \left(\frac{2}{x^2}-1\right)y^2 \\ 0 & zx\left(\frac{2+n}{x^2}-1\right) & 1-z^2 & -1-z^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

В новом характеристическом уравнении обозначим $\frac{2+n}{x^2}-1 = A$, $\frac{2}{x^2}-1 = B$; кроме того, матрицу, стоящую под знаком определителя, умножим слева на матрицу Ω и справа – на матрицу Ω^{-1} , где $\Omega = \text{diag}(x/y, x/y, 1, 1)$.

В результате уравнение (7) примет окончательную форму:

$$\begin{vmatrix} -1-z^2 & A \cdot y^2 & z \cdot y & (1-B) \cdot z \cdot y \\ 1-z^2 & -1-z^2 & 0 & -B \cdot z \cdot y \\ z \cdot y & (1-A) \cdot z \cdot y & -1-z^2 & B \cdot y^2 \\ 0 & -A \cdot z \cdot y & 1-z^2 & -1-z^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

В этом уравнении между различными элементами и блоками матрицы, стоящей под знаком определителя, наблюдается много сходного, что лишний раз подчёркивает сходство продольных и поперечных колебаний пружины.

При условии $d=0$, чему соответствует равенство $z=0$, уравнение (8) распадается на два независимых:

для продольных колебаний - $A \cdot y = 0$;

для поперечных колебаний - $B \cdot y = 0$,

если принять (условно), что коэффициент Пуассона $n=0$, то эти уравнения совпадут между собой.

Заметим, что уравнение (8) имеет четвёртый порядок относительно частоты I (к тому же оно биквадратное) и двенадцатый порядок относительно волнового числа a . Уменьшение порядка характеристического уравнения связано с использованием более простой модели пружины (прямого бруса), соответствующей условию $c = \infty$.

Характеристическое уравнение содержит члены, зависящие от величины tg^2d , а этот параметр мал.

Поэтому, по крайней мере, для нижних ветвей характеристического уравнения можно принять $tg^2d=0$ и рассмотреть отдельные уравнения для продольных и для крутильных колебаний.

При построении нижней петли решений характеристического уравнения во всех случаях можно согласиться с условием $c \gg 1$, что резко упрощает форму этого уравнения. Для продольных колебаний оно принимает вид $I^2 \cdot ((1+n)/2 - a^2) = a^2 \cdot (1+a^2)^2$, а для поперечных – очень похожий: $I^2 \cdot (1-a^2) = a^2 \cdot (1+a^2)^2$.

Вблизи начала координат расхождение между решениями этих уравнений сводится к тому, что во втором случае график нижней петли сжимается по направлению оси $(-I^2)$ в $(1+n)/2$ раз, где $n \square 0.3$ (рис.1).

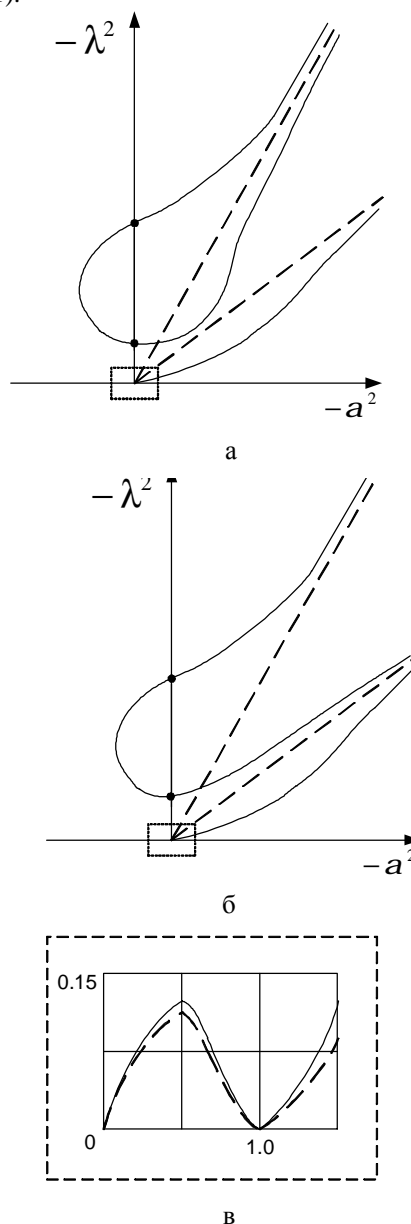


Рисунок 1 - Решение характеристических уравнений (а – для продольных, б – для поперечных, в – нижняя ветвь графика)

Для анализа верхних ветвей характеристического уравнения и, особенно, их асимптотического поведения при больших частотах, использовать условие $c \gg 1$ недопустимо, но в этом нет необходимости. Квадраты угловых коэффициентов асимптот характеристического уравнения (рис.1) являются диагональными элементами матрицы $M^{-1} \cdot C^{-1}$:

- для продольных:

$$M_x^{-1} \cdot C_x^{-1} = 4 \cdot c^2 \cdot \text{diag}((1+n)^{-1}/2, 1, (1+n)^{-1}/2),$$

- для поперечных колебаний:

$$M_y^{-1} \cdot C_y^{-1} = 4 \cdot c^2 \cdot \text{diag}(1, (1+n)^{-1}/2, 1).$$

Сходство и различие между этими результатами имеет простое объяснение. В области высоких частот мы фактически вычёркиваем из уравнений матрицу влияния B (принимая её нулевой). Но если разные виды деформации не влияют друг на друга, то это означает, что мы распрямляем пружину. Поперечное сечение распрямлённой пружинной проволоки имеет те же самые шесть степеней свободы, что и у навитой. При этом если проволока имеет круглое сечение, то для трёх видов деформации (осевого сжатия и изгибов в двух плоскостях) скорость распространения волны оказывается одной и той же, а для трёх других видов деформации (кручения и сдвига по двум осям) эти скорости также совпадают, но имеют меньшее значение.

Для построения верхних ветвей, кроме асимптот, целесообразно найти их точки пересечения с осью $(-I^2)$, определяющие т.н. "частоты покоя" пружины. Для этих частот все точки пружины деформируются синхронно (в одной фазе и с одной амплитудой).

Квадраты частот покоя являются точками спектра матрицы $M_x^{-1} \cdot B \cdot C_x^{-1} \cdot B^T$ для продольных и матрицы $M_y^{-1} \cdot B^T \cdot C_y^{-1} \cdot B$ для поперечных колебаний. В результате расчёта спектров этих матриц были получены следующие значения:

$$w_2^2 = 2 \cdot c^2; w_3^2 = 8 \cdot c^2 \cdot (2 \cdot c^2 + 1)/(1+n) \quad \text{- для продольных;}$$

$$w_2^2 = 4 \cdot c^2; w_3^2 = 4 \cdot c^2 \cdot (4 \cdot c^2 + 1)/(1+n) \quad \text{- для поперечных колебаний.}$$

Было проведено сопоставление частот собственных колебаний, полученных при использовании разных моделей пружины и в эксперименте. Алгоритм определения спектра пружины был реализован с использованием программной оболочки MathCAD 11. Сопоставление результатов расчета собственных частот колебаний пружины проводилось с результатами эксперимента из монографии [4], численными расчетами [2] (по частотам поперечных колебаний) и собственным экспериментом (по частотам продольных колебаний).

В [4] были приведены экспериментальные данные по измерению поперечных частот и форм колебаний серии цилиндрических пружин. Приводились также и расчетные данные, полученные на основе замены пружины эквивалентным стержнем. Во всех расчётах использовались следующие характеристи-

ки материала пружины: плотность $s = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $n = 0,3$, модуль Юнга $E = 2,15 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$.

Пружина № 1 [4] имеет следующие данные: диаметр навивки $d_n = 0,033 \text{ м}$, диаметр сечения проволоки $d_p = 0,002 \text{ м}$, индекс пружины $c = 16,5$, начальная высота пружины $H_0 = 0,069 \text{ м}$, число рабочих витков $i_0 = 11,5$. Первая поперечная собственная частота, полученная в [4] с помощью метода эквивалентного стержня, равна $w_{sc} = 73 \text{ Гц}$; опытные данные: $w_0 = 69 \text{ Гц}$. Использование новой математической модели позволило получить значение $w_n = 71,7 \text{ Гц}$.

Для пружины № 14 [4] геометрические параметры составляли $d_n = 0,073 \text{ м}$, $d_p = 0,0015 \text{ м}$, $c = 5$, $H_0 = 0,132 \text{ м}$, $n = 7,1$. Для этой пружины, кроме эксперимента и расчета (с использованием модели эквивалентного стержня), в [2] приведены численные расчеты основной гармонике по модели винтового бруса с шестью степенями свободы на сетке с числом узлов 100 и 600. Получены следующие результаты: $w_0 = 16 \text{ Гц}$, $w_{sc} = 18,6 \text{ Гц}$, $w_{об} = 14,9 \text{ Гц}$, соответственно. Результат расчёта по новой модели составил $w_n = 16,2 \text{ Гц}$.

При проведении собственного эксперимента в качестве объекта исследования была выбрана форсуночная пружина дизеля ЯМЗ-238, устанавливаемого на автомобилях КраЗ. Цилиндрическая пружина с витками круглого сечения имеет $i_0 = 6$ рабочих витков, диаметр навивки $d_n = 0,012 \text{ м}$, диаметр сечения проволоки $d_p = 0,004 \text{ м}$, индекс пружины $c = 3$, начальная высота пружины $H_0 = 0,06 \text{ м}$, предварительная затяжка $H_{пред} = 0,0024 \text{ м}$, пружина опирается на подогнутый торцевой виток, участок контакта составляет 3/4 полного витка. Анализ осциллограмм касательных напряжений, приведенных в [5], позволил определить основную частоту продольных колебаний, которая составила $w_0 = 2000 \pm 20 \text{ Гц}$. При использовании модели эквивалентного стержня имеем $w_{sc} = 2112 \text{ Гц}$, результат расчёта по новой модели - $w_n = 2070 \text{ Гц}$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях использование новой математической модели пружины позволило уточнить первую собственную частоту пружины, снизив погрешность в два и более раз.

К аналогичным результатам привели численные эксперименты по сопоставлению двух моделей винтового бруса (из [2] и уточнённой), результаты которых представлены в табл.1 (столбцы * - результаты полученные по модели винтового бруса, столбцы ** - по уточненной модели). Актуальность принятых уточнений возрастает с уменьшением индекса и числа витков.

Таблиця 1 – Расчётные значения приведенных частот из начального участка спектра продольных собственных колебаний для пружин с различным числом витков i и индексом c

$i=3, c=3$		$i=3, c=30$	
частоты		частоты	
*	**	*	**
0.12818	0.11475	0.11812	0.11470
0.18571	0.17696	0.17880	0.17693
0.18604	0.18841	0.22615	0.21970
0.24242	0.2198	0.27907	0.27842
0.27796	0.27843	0.28496	0.28138
0.31457	0.28143	0.44900	0.44006
0.48436	0.44020	0.75981	0.75323
0.75212	0.75335	1.15205	1.14741
1.08456	1.14750	1.61572	1.61311
1.46727	1.61317	2.14617	2.14601
1.89102	2.14605	2.74048	2.74344
2.34907	2.74345	3.39647	3.40347
2.83610	3.40344	4.11251	4.12469
3.34773	4.12461	4.88726	4.90599
3.87997	4.90584	5.71963	5.74651
4.26928	5.74628	6.60871	6.64560
4.34601	6.64526	7.55370	7.60270

$i=4, c=2.5$		$i=40, c=2.5$	
частоты		частоты	
*	**	*	**
0.09437	0.0919	0.01012	0.01080
0.14296	0.14029	0.01549	0.01630
0.14310	0.14738	0.01550	0.01622
0.18353	0.17807	0.02023	0.02160
0.23501	0.24178	0.03025	0.03236
0.25551	0.24229	0.03094	0.03237
0.26678	0.27932	0.03104	0.0326
0.2813	0.2875	0.04035	0.04312
0.36787	0.34084	0.04632	0.04831
0.53404	0.54671	0.04641	0.04889
0.74097	0.80700	0.05036	0.05387
0.97551	1.11069	0.06028	0.06341
1.23065	1.45439	0.06165	0.06514
1.50169	1.83623	0.06172	0.06520
1.78511	2.25493	0.07021	0.07474
		0.07678	0.08006
		0.07681	0.08121
		0.08012	0.08536

Выводы. Уравнения динамической деформации пружины приведены к безразмерному виду, что позволило трактовать их как связанные колебания между двумя группами движений сечения – продольными и поперечными. Показана аналогия между этими группами движений сечения, что привело к универсальному алгоритму для моделирования соответствующих колебаний. Изучено влияние индекса пружины на ее спектр собственных частот. Вскрыты причины появления пар близких собственных частот в спектре цилиндрической пружины сжатия. Проанализированы геометрические параметры самой пружины, для которых возможно использовать упрощенные модели, учитывающие 3 степени свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В. А., Нарайкин О. С. Упругие элементы машин. - М. Машиностроение, 1989. - 260с.
2. Аслаян А.Г., Гулин А.В., Карташов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. Т.2. - 1990. - № 8. - С.21-30.
3. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. Збірник наукових праць НТУ "ХПІ". - Харків, 2004.- Вип. 2 (9). - С. 257-264.
4. Хвингия М.В. Малые продольные колебания конических и фасонных пружин // Вопросы проектирования, изготовления и службы пружин. – Л.: Машгиз, 1956. – С. 86-112.
5. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Экспериментальное и расчётное исследование колебаний витков пружины дизельной форсунки // Вісник НТУ "ХПІ". - Харків, 2005.- № 37.- С.159-168.

Статья поступила 25.01.2008.
 Рекомендовано к печати д.т.н., проф.
 Масловым А.Г.