УДК 531.7.08

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПЕРЕТВОРЮВАЧ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ

Ведміцький Ю. Г., асистент, Кухарчук В. В., д.т.н., проф.
Вінницький національний технічний університет
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
E-mail: wjg@ukr.net

В данной работе введено понятие и разработана математическая модель обобщенного преобразователя момента инерции, который представляет собой абстрактную наиболее общую форму относительно всех существующих и возможных измерительных преобразователей момента инерции.

Ключевые слова: измерение, преобразование, момент инерции, математическая модель.

The paper presents the investigation of the abstract concept and mathematical model of the generalized converter of the moment of inertia.

Key words: measuring, conversion, moment of inertia, mathematical model.

Вступ. Огляд сучасного стану вимірювальних перетворювачів моменту інерції та аналіз їх теоретичного забезпечення [1] свідчить про відсутність на сьогодні єдиних підходів як в розробці методів вимірювання моменту інерції, так і створенні їх математичних моделей.

Більш того, оскільки за своєю будовою наукова теорія має являти собою цілісну та внутрішньо диференційовану систему ієрархічно взаємозв’язаних, узагальнюючих, логічно сумісних понять, законів та тверджень, то наразі існують всі підстави стверджувати, що як системи узагальнюючих положень теорії перетворювачів моменту інерції на сьогодні не існує.

Аналіз попередніх досліджень. В роботах [1-6] авторами були розроблені та наведені узагальнені математичні моделі перетворювачів моменту інерції з одним (1-го і 2-го порядків) та двома (3-го порядку) ступенями вільності. Це дозволило систематизувати існуючі перетворювачі та методи перетворення моменту інерції та створило необхідні передумови для розробки нових методів перетворення з покращеними метрологічними характеристиками.

Проте невирішеними залишились наступні питання.

1. Не була розроблена математична модель узагальненого перетворювача моменту інерції довільного порядку (з n ступенями вільності), що, природно, має бути логічним завершенням самого процесу узагальнення.

2. В основу розроблених математичних моделей перетворювачів моменту інерції були покладені рівняння Лагранжа другого роду. Однак це було зроблено аксіоматично, без належного теоретичного обґрунтування.

3. Створені математичні моделі обмежувалися виключно механічними системами перетворювачів моменту інерції і поза увагою залишилися електромеханічні системи.

Наведені питання є важливими. На думку авторів їх вирішення дозволить створити загальні теоретичні засади процесу перетворення моменту інерції і частково розв’язати проблему відсутності теорії перетворювачів моменту інерції.

Це дасть змогу:

- за загальними критеріями здійснити систематизацію та класифікацію існуючих та можливих методів та перетворювачів моменту інерції;
- сформувати на основі узагальненої математичної моделі єдину методику розробки математичних моделей існуючих та можливих перетворювачів моменту інерції;
- проаналізувати з позицій узагальненої математичної моделі існуючі методи перетворення моменту інерції і провести їх порівняльний аналіз;
- розробити принципово нові методи перетворення моменту інерції та на їх основі перетворювачі моменту інерції з покращеними метрологічними характеристиками, а також створити необхідні сприятливі умови для цього.

Мета роботи – введення та формування поняття узагальненого перетворювача моменту інерції, розробка структурної схеми і створення його математичної моделі.

Матеріал і результати дослідження. Насамперед введемо і дамо означення узагальненого перетворювача моменту інерції.

Узагальненим перетворювачем моменту інерції назвемо абстрагований вимірювальний пристрій, що реалізує вимірювальне перетворення моменту інерції в математично з ним пов'язану механічну фізичну величину – геометричну, кінематичну або динамічну, який є найзагальнішою формою відносно існуючих та можливих перетворювачів моменту інерції і перетворюється в них за окремих умов.

Структурна схема узагальненого перетворювача моменту інерції наведена на рис. 1.

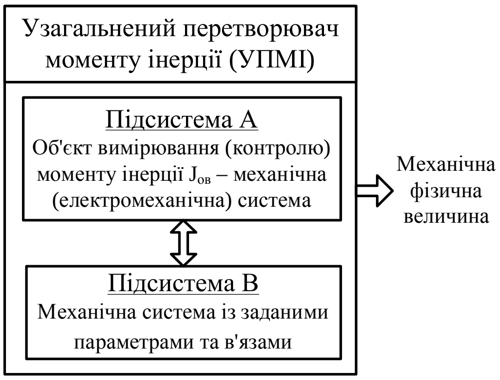

Рисунок 1 – Структурна схема узагальненого перетворювача моменту інерції

В загальному випадку цей пристрій являє собою суто механічну або електромеханічну систему і складається з двох взаємодіючих частин (підсистем):

- самого об'єкту вимірювання (контролю), який за природою є або механічною, або електромеханічною системою (назвемо цю частину підсистемою А). За умовою задачі момент інерції J_{OB} підсистеми А є невідомим і має являти собою вхідну фізичну величину;

- деякої додаткової суто механічної системи з наперед заданими властивостями та в'язями (підсистема В), що певним наперед заданим чином зв'язана з об'єктом вимірювання (контролю) і створює для нього або поле активних сил, спонукаючи до руху, або поле реакції в'язей, обмежуючи цей рух. Отже, як і підсистема А, підсистема В визначає стан перетворювача як системи і впливає на систему його рівнянь руху.

Математична модель УПМІ. Розглянемо рух системи УПМІ.

Нехай підсистема А містить N_A, підсистема В – N_B матеріальних точок з масами m_i, m_j, де $i = 1, 2, ..., N_A$ та $j = 1, 2, ..., N_B$ відповідно (рис. 2).

Наразі необхідно зауважити, що дискретний поділ підсистем, як і системи в цілому, носить дещо штучний (ідеалізований) характер, оскільки складові частини реально існуючих перетворювачів моменту інерції є фізичними тілами з неперервним розподілом маси в них.

Однак, внаслідок того, що перехід від формул, які містять суми по дискретних точках системи, до інтегралів здійснюються через інтегральні суми, то в теоретичній механіці [7] допускається неперервні системи еквівалентно заміщувати системами дискретними, якщо тільки кількість матеріальних точок підсистем N_A та N_B перетворити в надвеликі числа, а їх маси m_i та m_j – в дуже малі.

За виконання означених умов і дискретна, і неперервна системи перетворювача моменту інерції будуть мати ті ж самі або математично подібні диференціальні рівняння руху.

Скористаємося даною властивістю, поширивши її на систему УПМІ.

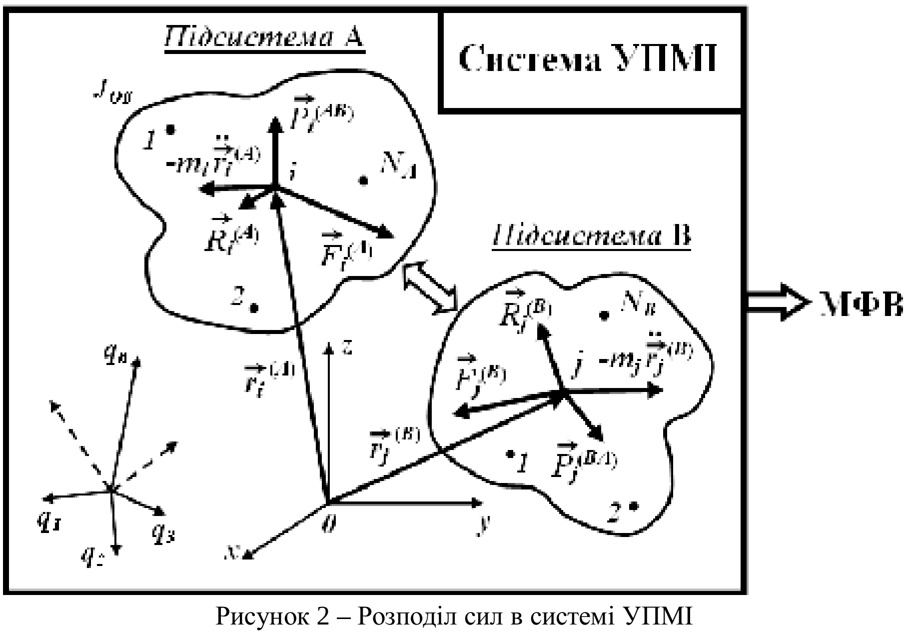

Рисунок 2 – Розподіл сил в системі УПМІ

Рівняння руху підсистеми А УПМІ. Під час руху підсистеми А до кожної її матеріальної точки i, де $i = 1, 2, ..., N_A$, прикладена в загальному випадку сукупність сил, які в будь-який момент часу утворюють врівноважену систему сил:

- силу $\vec{F}_i^{(A)}$, що являє собою рівнодіючу сукупності активних сил, прикладених до довільної i-ої матеріальної точки підсистеми А;

- силу $\vec{R}_i^{(A)}$, що обмежувала б рух i-ої матеріальної точки підсистеми А за умови незалежності останньої від підсистеми В. Ця сила є рівнодіючою реакцій в'язей власне підсистеми А;

- силу $\vec{P}_i^{(AB)}$ – рівнодіючу активних сил та реакцій в'язей, що спонукають до руху чи, навпаки, обмежують рух i-ої матеріальної точки підсистеми А внаслідок силової дії з боку підсистеми В;

- силу інерції Даламбера $-m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)}$, що діє на кожну i-ту матеріальну точку з масою m_i, де $\vec{r}_i^{(A)}$ – радіус-вектор i-ої матеріальної точки відносно заданої інерціальної системи відліку.

Рівняння руху підсистеми А отримаємо, скориставшись принципами Даламбера і Даламбера-Лагранжа [7].

На основі цих принципів загальне рівняння динаміки руху підсистеми А УПМІ має вид:

$$\vec{F}_i^{(A)} + \vec{R}_i^{(A)} + \vec{P}_i^{(AB)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)} = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^{N_A} \left(\vec{F}_i^{(A)} + \vec{R}_i^{(A)} + \vec{P}_i^{(AB)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)} \right) \cdot \delta \vec{r}_i^{(A)} = 0 . \quad (1)$$

Скориставшись принципом визволення [7] і залишивши власні в'язі підсистеми А лише як ідеальні, для яких, як відомо:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \vec{R}_i^{(A)} \cdot \delta \vec{r}_i^{(A)} = 0 ,$$

загальне рівняння динаміки (1) можна переписати:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \left(\vec{F}_i^{(A)} + \vec{P}_i^{(AB)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)} \right) \cdot \delta \vec{r}_i^{(A)} = 0 .$$

Оскільки варіація радіус-вектора:

$$\delta \vec{r}_i^{(A)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \delta q_s ,$$

то:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \left[\left(\vec{F}_i^{(A)} + \vec{P}_i^{(AB)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i^{(A)} \right) \cdot \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \delta q_s \right] = 0 .$$

Змінивши порядок додавання, отримаємо:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N_A} \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} + \sum_{i=1}^{N_A} \vec{P}_i^{(AB)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \frac{d \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) \cdot \delta q_s = 0 . \quad (2)$$

В рівнянні (2) сума $\sum_{i=1}^{N_A} \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s}$ являє собою узагальнену силу, яка діє на матеріальні точки підсистеми А і відповідає s-ій узагальненій координаті, тобто

$$Q_s^{(A)} = \sum_{i=1}^{N_A} \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} . \quad (3)$$

Іншу суму $\sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \frac{d \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s}$ з рівняння (2) подамо як різницю:

$$\frac{d \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) - \dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right),$$

$$\sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \frac{d \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} = \sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) - \sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right). \quad (4)$$

Врахувавши першу тотожність Лагранжа [7]:

$$\frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{\partial \dot{q}_s},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{\partial \dot{q}_s} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \right)^2 \right],$$

$$\sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left(\sum_{i=1}^{N_A} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i^{(A)} \right)^2 \right) \right],$$

та другу тотожність Лагранжа [7]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{\partial q_s},$$

$$\sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i^{(A)}}{\partial q_s} \right) = \sum_{i=1}^{N_A} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i^{(A)}}{\partial q_s} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_s}\sum_{i=1}^{N_A}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{\vec r}_i^{(A)}\right)^2,$$

перетворимо співвідношення (4) і введемо в формулу кінетичну енергію T_A підсистеми А:

$$T_A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_A} m_i\left(\dot{\vec r}_i^{(A)}\right)^2.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{N_A} m_i\cdot\frac{d\dot{\vec r}_i^{(A)}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec r_i^{(A)}}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_s}\right) - \frac{\partial T_A}{\partial q_s}. \quad (5)$$

Підставимо співвідношення (3) і (5) в рівняння руху підсистеми А (2). Тоді це рівняння набуде виду:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s^{(A)} + \sum_{i=1}^{N_A}\vec P_i^{(AB)}\cdot\frac{\partial \vec r_i^{(A)}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_s}\right) + \frac{\partial T_A}{\partial q_s}\right)\cdot\delta q_s = 0.$$

З незалежності варіацій δq_s узагальнених координат випливає:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_s}\right) - \frac{\partial T_A}{\partial q_s} = Q_s^{(A)} + \sum_{i=1}^{N_A}\vec P_i^{(AB)}\cdot\frac{\partial \vec r_i^{(A)}}{\partial q_s}, \quad (6)$$
$$s = 1, 2, \ldots, n.$$

що і буде системою рівнянь руху підсистеми А УПМІ, складених в узагальнених координатах.

Рівняння руху підсистеми В УПМІ отримаємо на основі принципу Даламбера-Лагранжа аналогічним чином. Тоді для підсистеми В УПМІ можна записати:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot q_s}\right) - \frac{\partial T_B}{\partial q_s} = Q_s^{(B)} + \sum_{j=1}^{N_B}\vec P_j^{(BA)}\cdot\frac{\partial \vec r_j^{(B)}}{\partial q_s}, \quad (7)$$
$$s = 1, 2, \ldots, n.$$

Рівняння руху системи УПМІ. Системою рівнянь руху УПМІ є сукупність систем рівнянь руху підсистеми А та підсистеми В, якщо тільки ці диференціальні рівняння отримані з врахуванням силової взаємодії між означеними підсистемами.

Тому на підставі (6) та (7) для системи УПМІ можна записати:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_s}\right) - \frac{\partial T_A}{\partial q_s} = Q_s^{(A)} + \sum_{i=1}^{N_A}\vec P_i^{(AB)}\cdot\frac{\partial \vec r_i^{(A)}}{\partial q_s}, s = 1,\ldots,n, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot q_s}\right) - \frac{\partial T_B}{\partial q_s} = Q_s^{(B)} + \sum_{j=1}^{N_B}\vec P_j^{(BA)}\cdot\frac{\partial \vec r_j^{(B)}}{\partial q_s}, s = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Покоординатно додамо між собою рівняння системи, врахувавши при цьому теорему про дію та протидію підсистем А та В в узагальнених силах:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_s}T_A\left(J_{OB}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot q_s}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial q_s}T_A\left(J_{OB}\right) + \frac{\partial T_B}{\partial q_s}\right] = Q_s^{(A)} + Q_s^{(B)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Система рівнянь руху УПМІ (8) являє собою систему n диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат, що представлена у формі рівнянь Лагранжа другого роду [7] і є узагальненою математичною моделлю будь-якого теоретично можливого перетворювача моменту інерції.

Особливості руху системи УПМІ. Руху системи УПМІ притаманні деякі особливості, що дозволяють спростити її систему рівнянь руху. Розглянемо та проаналізуємо їх.

1. Обертальний рух підсистеми А УПМІ. Осьовий момент інерції має прямий фізичний зміст і тісно пов'язаний з динамікою обертальної форми руху.

За обертального руху однозначне положення всіх матеріальних точок підсистеми А може бути задане кутовою координатою $q_1 = \varphi^{(A)}$. В цьому випадку неважко довести наступне.

а) Кінетична енергія підсистеми А за її обертального руху дорівнює:

$$T_A = \frac{1}{2}\left(J_{OB} + m_A l^2\right)\dot q_1^2. \quad (9)$$

Тоді для частинних та повних похідних можна записати:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_1} = \left(J_{OB} + m_A l^2\right)\dot q_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_1}\right) = \left(J_{OB} + m_A l^2\right)\ddot q_1, \\ &\frac{\partial T_A}{\partial q_s} = 0 \quad \left(s = 1, 2, \ldots, n\right), \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_A}{\partial \dot q_s}\right) = 0 \quad \left(s = 2, 3, \ldots, n\right). \end{aligned} \quad (10)$$

б) Під час обертального руху підсистеми А її узагальненою силою по кутовій координаті буде головний момент сил M_A відносно осі обертання:

$$Q_1^{(A)} = \sum_{i=1}^{N_A}\vec F_i^{(A)}\cdot\frac{\partial \vec r_i^{(A)}}{\partial q_1} = M_A. \quad (11)$$

2. Особливості руху підсистеми В УПМІ. Рух підсистеми В в загальному випадку може носити складний характер. Однак навіть за такого руху внаслідок того, що узагальнена координата q_1 визначає положення виключно матеріальних точок підсистеми А, а узагальнена швидкість $\dot q_1$ – швидкість руху точок цієї підсистеми, кінетична енергія підсистеми В УПМІ не залежить ні від цієї узагальненої координати, ні від її швидкості.

Тоді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_1}\right)=0\,,\ \frac{\partial T_B}{\partial q_1}=0\,. \qquad (12)$$

3. Рух УПМІ в потенціальному силовому полі. Систему рівнянь руху УПМІ (8) можна спростити, врахувавши, що рух обох підсистем А та В УПМІ здійснюється в полі активних сил, частина з яких є потенціальними силами, для яких:

$$Q_{п_s}=-\frac{\partial П}{\partial q_s}\,,\ s=1,2,...,n\,, \qquad (13)$$

де П – потенціальна енергія системи узагальненого перетворювача моменту інерції.

4. Рух УПМІ в полі дії дисипативних сил. Система УПМІ не є консервативною системою, оскільки під час руху і підсистеми А, і підсистеми В відбувається розсіювання повної енергії перетворюючись явно чи опосередковано здебільшого у тепло. Сам процес носить незворотній характер і відбувається під дією дисипативних сил

$$Q_{д_s}=-\frac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_s}\,,\ s=1,2,...,n\,, \qquad (14)$$

де $Ф=Ф\left(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n,t\right)$ – дисипативна функція Релея (функція розсіювання), яка характеризує швидкість розсіювання енергії у часі.

Математична модель системи УПМІ. Математичну модель системи УПМІ отримаємо на основі її диференціальних рівнянь руху (8) (математичної моделі теоретично можливого УПМІ) з врахуванням особливостей руху цієї системи (9)-(14):

$$\begin{cases}\left(J_{OB}+m_A l^2\right)\ddot{q}_1=M_A-\dfrac{\partial П}{\partial q_1}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_1},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s-\dfrac{\partial П}{\partial q_s}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_s},\ s=2,...,n.\end{cases} \qquad (15)$$

У випадку неруйнівного перетворення моменту інерції $l=0$ і тоді математична модель УПМІ набуває вигляду:

$$\begin{cases}J_{OB}\,\ddot{q}_1=M_A-\dfrac{\partial П}{\partial q_1}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_1},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s-\dfrac{\partial П}{\partial q_s}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_s},\ s=2,3,...,n.\end{cases}$$

Математична модель електромеханічної системи УПМІ. У випадку, якщо підсистема А буде електромеханічною, то її рух, як і рух системи УПМІ в цілому, визначатиметься дією та взаємодією не тільки механічних сил, але і сил електромагнітного походження [8], що супроводжуватиметься збільшенням кількості незалежних змінних, які однозначно описують стан та рух електромеханічної системи УПМІ. Ці додаткові незалежні змінні мають електричне походження і за Дж. Максвеллом являють собою електричні заряди (кількість електрики), що проходять, починаючи з деякого моменту часу, через поперечний переріз провідників, утворюючи систему незалежних замкнених контурних струмів підсистеми А.

За цих умов математична модель електромеханічної системи УПМІ (15) має бути доповнена додатковими електричними координатами та рівняннями Лагранжа-Максвелла:

$$\begin{cases}\left(J_{OB}+m_A l^2\right)\ddot{q}_1=M_A^{(м)}+M_A^{(e)}-\dfrac{\partial П}{\partial q_1}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_1};\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s-\dfrac{\partial П}{\partial q_s}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_s},\ s=2,3,...,n;\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W_A^{(m)}}{\partial i_s}\right)-\dfrac{\partial W_A^{(m)}}{\partial q_s^{(e)}}=e_s-\dfrac{\partial W_A^{(e)}}{\partial q_s^{(e)}}-\dfrac{\partial Ф_A^{(e)}}{\partial i_s},\\ s=n+1,...,k,\end{cases} \qquad (16)$$

де k – ступінь вільності електромеханічної системи УПМІ ($k>n$); $n+1,n+2,...,k$ – система незалежних електричних контурів підсистеми А; $q_s^{(e)}$ – узагальнені електричні координати підсистеми А; i_s – контурні струми, що проходять незалежними контурами підсистеми А; $W_A^{(m)}$ – енергія магнітного поля підсистеми А; $W_A^{(e)}$ – енергія електричного поля підсистеми А; $Ф_A^{(e)}$ – електрична дисипативна функція Релея, що характеризує інтенсивність розсіювання енергії внаслідок циркуляції в середовищі підсистеми А контурних струмів; $M_A^{(м)}$ – головний момент механічних сил підсистеми А; $M_A^{(e)}$ – обертальний момент, що створюється внаслідок дії на підсистему А електромагнітних сил; e_s – контурні електрорушійні сили – зовнішні джерела електричної енергії та наведені е.р.с.

В системі (16) ні кінетична енергія підсистеми В T_B, ні потенціальна енергія системи УПМІ П, ані механічна дисипативна функція Релея Ф не залежать від узагальнених електричних координат і контурних струмів. Тому перепишемо дану систему рівнянь Лагранжа-Максвелла у вигляді системи рівнянь (15):

$$\begin{cases}\left(J_{OB}+m_A l^2\right)\ddot{q}_1=M_A-\dfrac{\partial П}{\partial q_1}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_1},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_B}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T_B}{\partial q_s}=Q_s-\dfrac{\partial П}{\partial q_s}-\dfrac{\partial Ф}{\partial \dot{q}_s},\ s=2,...,n.\end{cases} \qquad (17)$$

де $M_A=M_A^{(м)}+M_A^{(e)}$, врахувавши при цьому, що обертальний момент підсистеми А $M_A^{(e)}$ математично пов'язаний з узагальненими електричними координатами $q_{n+1}^{(e)}, q_{n+2}^{(e)}, ..., q_k^{(e)}$ та контурними струмами $i_{n+1}, i_{n+2}, ..., i_k$ і в загальному випадку залежить від часу t.

Отримана математична модель електромеханічної системи УПМІ (17) являє собою систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $q_1, q_2, ..., q_n$, що представлена у формі рівнянь Лагранжа другого роду. За умови відсутності дії електромагнітних сил $M_A^{(e)} = 0$ ця математична модель трансформується в математичну модель суто механічної системи УПМІ (15).

Висновки. В роботі були розвинуті теоретичні засади процесу перетворення моменту інерції механічних та електромеханічних систем. Запропоновано поняття узагальненого перетворювача моменту інерції (УПМІ), який являє собою абстрактну найзагальнішу форму відносно існуючих та можливих перетворювачів моменту інерції. Це дозволило сформувати загальну структурну схему і на основі варіаційних принципів аналітичної механіки розробити узагальнену математичну модель.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. До питання розв'язку проблеми систематизації математичних моделей і методів перетворення моменту інерції. Огляд та перспектива // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Зб. наук. пр. КДПУ. – Вип. 3(38), Ч. 1. – Кременчук: КДПУ, 2006. – С. 130-133.

2. Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В.В. Рівняння Лагранжа як основа теорії перетворювачів моменту інерції // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Зб. наук. пр. КДПУ. – Кременчук: КДПУ, 2005. – №3(32). – С. 89-91.

3. Кухарчук В.В., Ведміцький Ю.Г. Теорія динамічних аналогій в перетворенні моменту інерції тіл обертання та електричні моделі існуючих і можливих вимірювальних перетворювачів // Вісник Хмельницького національного університету . – 2005. – №4. Ч. 1. Т.1 (68). – С. 122-128.

4. Кухарчук В.В., Ведміцький Ю.Г. Математичні і електричні моделі перетворювача моменту інерції з двома ступенями вільності // Матеріали VIII міжнародної конференції КУСС-2005. – Вінниця. – С. 69.

5. Кухарчук В.В., Ведміцький Ю.Г. Нові методи вимірювання моменту інерції в задачах автоматичного управління технічними системами // Матеріали XIII міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика -2006). – Вінниця. – С. 173.

6. Ведміцький Ю.Г., Кухарчук В. В. Узагальнена математична модель просторово-оптичного перетворення кутової швидкості та моменту інерції в задачах аналізу та синтезу // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – №4(73). – 2007. – С. 7-14.

7. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.

8. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш. Нелинейная электромеханика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.

Стаття надійшла 14.04.2008 р.