УДК 681.5.015+62-83:629.433

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОПРИВОДА ТРАМВАЯ В НОМІНАЛЬНОМУ РЕЖИМІ ТА В РЕЖИМІ ПЕРЕВАНТАЖЕННЯ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМУМУ ВИТРАТ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ

Мокін Б.І., д.т.н., проф., Мокін О.Б., к.т.н.
Вінницький національний технічний університет
21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95
E-mail: vstu@vstu.vinnica.ua

Предложен метод синтеза законов изменения угловой скорости ротора и тока в якоре тягового электродвигателя постоянного тока электропривода трамвая, которые приводят к минимизации потребления электрической энергии электроприводом во время движения трамвая от одной остановки к другой на горизонтальном участке маршрута при его номинальной нагрузке или нагрузке, превышающей номинальною.

Ключевые слова: оптимизация, потребление электроэнергии, трамвай, электропривод.

There had been offered the variation laws synthesis method of a rotor angular velocity and current in an anchor of direct current electric motor of a tram electric drive which leads to power consumption minimization of the electric drive during tram movement from one stop to another on horizontal part of a route with its rated load or loading greater than the rated.

Key words: optimization, electric power consumption, tram, electric drive.

Вступ. В останній час в трамвайних парках міст України почали з’являтись трамваї з електроприводами, регулювання режимів яких здійснюється за допомогою силових транзисторів, що працюють в імпульсному режимі. Тому актуальною є задача синтезу законів зміни кутової швидкості для таких систем.

Аналіз попередніх досліджень. В роботі [1] задача оптимізації електропривода трамвая за критерієм мінімуму втрат електроенергії

$$e = \int_0^{\tau_k} i^2 d\tau, \qquad (1)$$

де i – струм в якірному колі електропривода трамвая, виражений у відносних одиницях; τ_k – відносний час руху від однієї трамвайної зупинки до наступної, e – відносні втрати електроенергії в якірному колі, доведена до рівняння:

$$\frac{2i}{\phi + i\dfrac{\partial\phi}{\partial i}} = \lambda_0 \tau + C, \qquad (2)$$

в якому $\phi = \phi(i)$ – магнітний потік, виражений у відносних одиницях, що перетинає обмотку якоря і для електродвигуна послідовного збудження є функцією якірного струму i, що одночасно є і струмом збудження.

В роботі [2] авторами отримані математичні моделі для оптимального струму якоря i та оптимальної відносної кутової швидкості ν обертання ротора електродвигуна з використанням рівняння (2) та математичної моделі кривої намагнічування $\phi(i)$, побудованої в роботі авторів [3] у вигляді:

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 \cdot i^2 + b_2 \cdot i, & i \in [0, i_{сп}), \\ a_1 + b_1 \cdot i, & i \in [i_{сп}, \infty), \end{cases} \qquad (3)$$

де $i_{сп}$ – відносний струм спряження прямої і параболи в моделі (3).

Отримані в роботі [2] моделі задають закони зміни кутової швидкості ν та струму i, оптимальні за критерієм мінімуму втрат електроенергії в якірному колі при реостатному керуванні електроприводом.

В якірних колах таких електроприводів відсутні силові реостати, тож їх оптимізація з використанням критерію мінімуму втрат електроенергії в якірних колах втрачає сенс і стає доцільним використання критерію мінімуму витрат електроенергії електроприводом:

$$e = \int_0^{\tau_k} u\, i\, d\tau, \qquad (4)$$

де u – відносне значення напруги на шинах контактної мережі. За умови, що контактна мережа є потужною, за базове значення напруги береться напруга контактної мережі U_{km}, може бути зведений до виразу:

$$e = \int_0^{\tau_k} i\, d\tau. \qquad (5)$$

Мета роботи – синтез законів зміни кутової швидкості ротора та струму якоря тягового електропривода постійного струму, які забезпечують мінімізацію споживання електроенепгії приводом трамвая.

Матеріал і результати дослідження. *Постановка задачі.* Нехай на трамваї, що рухається по горизонтальній площині, встановлено електропривод з транзисторним регулюванням, динаміка електромеханічної частини якого описується рівнянням:

$$i\phi = \dot{\nu} + \mu . \qquad (6)$$

де μ – це відносний момент навантаження, який на горизонтальних ділянках трамвайної колії є величиною сталою і буде дорівнювати μ_0. Зазначимо, що виведення цього рівняння здійснено в роботі [1].

Оскільки на зупинках трамвай зупиняється, то граничними умовами для диференціального рівняння (6) будуть умови:

$$\begin{cases} \nu(0) = 0; \\ \nu(\tau_k) = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Нехай трамвай навантажений номінально або перевантажений. Як показано в роботі [2], у цьому випадку виконується умова:

$$i \ge i_{сп} , \qquad (8)$$

тому в якості математичної моделі кривої намагнічування можна використовувати лише її прямолінійну гілку, тобто:

$$\phi(i) = a_1 + b_1 i . \qquad (9)$$

Очевидним є те, що під час руху трамвая від однієї зупинки до наступної, яка знаходиться на відстані l_k, його електропривод відпрацьовує переміщення:

$$l_k = \int_0^{\tau_k} \nu \, d\tau . \qquad (10)$$

Знайдемо такі закони зміни відносної кутової швидкості *n* обертання ротора тягового електродвигуна трамвая та відносного струму *i* в якірному колі цього електродвигуна, які забезпечують виконання програми (10), задовольняють умовам (6) – (9) і доставляють мінімум критерію (5).

Розв'язання задачі. Використовуючи методику, викладену в роботі [1], побудуємо функцію Лагранжа для поставленої задачі. Вона матиме вигляд:

$$L = i + \lambda_0 (\dot{l} - \nu) + \lambda_1 (- i\phi + \dot{\nu} + \mu). \qquad (11)$$

Використовуючи функцію Лагранжа (11), запишемо для нашої задачі систему рівнянь Ейлера, які матимуть вигляд:

$$\begin{cases} L_i - \dfrac{d}{d\tau} L_{\dot{i}} = 0; \\ L_\nu - \dfrac{d}{d\tau} L_{\dot{\nu}} = 0; \\ L_l - \dfrac{d}{d\tau} L_{\dot{l}} = 0, \end{cases} \qquad (12)$$

або:

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 \left(\phi + i \dfrac{\partial \phi}{\partial i} \right) = 0; \\ -\lambda_0 - \dfrac{d}{d\tau} \lambda_1 = 0; \\ -\dfrac{d\lambda_0}{d\tau} = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Із третього рівняння системи (13) маємо:

$$\lambda_0(\tau) = -\lambda_0 = \mathrm{const} . \qquad (14)$$

Підставляючи значення $\lambda_0(\tau)$ із (14) в друге рівняння системи (13), отримаємо:

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = \lambda_0 . \qquad (15)$$

Інтегруючи (15), маємо:

$$\lambda_1(\tau) = \lambda_0 \tau + C_1 . \qquad (16)$$

Підставляючи значення $\lambda_1(\tau)$ з виразу (16) у перше рівняння системи (13), отримаємо:

$$1 - (\lambda_0 \tau + C_1) \cdot \left(\phi + i \frac{\partial \phi}{\partial i} \right) = 0 , \qquad (17)$$

або:

$$\frac{1}{\phi + i \dfrac{\partial \phi}{\partial i}} = \lambda_0 \tau + C_1 . \qquad (18)$$

Порівнюючи вирази (2) та (18), бачимо, що вони мають подібну структуру, але в чисельнику лівої частини суттєво відрізняються.

Тож, зрозуміло, що і математичні моделі струму та кутової швидкості теж будуть відрізнятись.

Перейдемо до синтезу цих моделей.

Підставляючи значення $\phi(i)$ з виразу (9) у співвідношення (18), після простих перетворень отримаємо:

$$\frac{1}{a_1 + 2b_1 i} = \lambda_0 \tau + C_1 , \qquad (19)$$

або:

$$i = \frac{1}{2b_1(\lambda_0 \tau + C_1)} - \frac{a_1}{2b_1} . \qquad (20)$$

У виразі (20) маємо два невідомих параметри λ_0 та C_1, тобто математичну модель для оптимального струму

$$i = f(\tau, \lambda_0, C_1), \qquad (21)$$

ми отримали у вигляді функції часу з двома невідомими параметрами λ_0 та C_1. Як їх визначити, покажемо пізніше, а зараз перейдемо до синтезу закону зміни кутової швидкості в оптимальному режимі функціонування електропривода.

Підставляючи значення *i* з виразу (20) у вираз (9), та використовуючи результат цієї підстановки разом з виразом (20) у співвідношенні (6), отримаємо:

$$\dot{\nu} = \left(\frac{1}{2b_1(\lambda_0\tau + C_1)} - \frac{a_1}{2b_1} \right) \times$$
$$\times \left(a_1 + b_1 \left(\frac{1}{2b_1(\lambda_0\tau + C_1)} - \frac{a_1}{2b_1} \right) \right) - \mu_0. \quad (22)$$

Інтегруючи це рівняння, після перетворень отримаємо:

$$\nu = -\frac{1}{4b_1\lambda_0(\lambda_0\tau + C_1)} - \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right)\tau + C_2. \quad (23)$$

Маємо модель у вигляді функції часу з трьома невідомими параметрами λ_0, C_1, C_2, для визначення яких потрібно скласти систему трьох рівнянь з цими невідомими параметрами.

Два із потрібних трьох рівнянь отримаємо, використовуючи граничні умови (7).

Підставляючи функцію n з виразу (23) у систему (7), отримаємо:

$$-\frac{1}{4b_1\lambda_0 C_1} + C_2 = 0; \quad (24)$$

$$-\frac{1}{4b_1\lambda_0(\lambda_0\tau_k + C_1)} - \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right)\tau_k + C_2 = 0. \quad (25)$$

Третє потрібне рівняння отримаємо, підставивши функцію n з виразу (23) у програму роботи електропривода (10):

$$-\int_0^{\tau_k} \frac{d\tau}{4b_1\lambda_0(\lambda_0\tau + C_1)} - \int_0^{\tau_k} \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right)\tau d\tau +$$
$$+ \int_0^{\tau_k} C_2 d\tau = l_k. \quad (26)$$

Взявши інтеграли виразу (26) та здійснивши необхідні перетворення, отримаємо:

$$\frac{1}{4b_1\lambda_0^2} \ln \frac{C_1}{\lambda_0\tau_k + C_1} - \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right) \frac{\tau_k^2}{2} +$$
$$+ C_2\tau_k = l_k. \quad (27)$$

З рівняння (24) випливає, що:

$$C_2 = \frac{1}{4b_1\lambda_0 C_1}. \quad (28)$$

Підставляючи значення C_2 з виразу (28) у рівняння (25) і (27), отримаємо систему вже двох рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4b_1\lambda_0(\lambda_0\tau_k + C_1)} - \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right)\tau_k + \\ + \frac{1}{4b_1\lambda_0 C_1} = 0; \\ \frac{1}{4b_1\lambda_0^2} \ln \frac{C_1}{\lambda_0\tau_k + C_1} - \left(\frac{a_1^2}{4b_1} + \mu_0 \right) \frac{\tau_k^2}{2} + \\ + \frac{\tau_k}{4b_1\lambda_0 C_1} = l_k, \end{cases} \quad (29)$$

з двома невідомими λ_0, C_1, розв'язуючи яку знайдемо їх чисельні значення.

Підставляючи визначені з системи (29) значення λ_0, C_1 у вираз (28), отримаємо чисельне значення і C_2. А підстановкою визначених чисельних значень λ_0, C_1, C_2 у вирази (20) та (23) завершимо синтез моделей для ν та i, реалізація яких в електроприводі трамвая мінімізує витрати електроенергії в ньому під час руху трамвая від однієї зупинки на маршруті до наступної протягом заданого часу τ_k.

Висновки. 1.Запропоновано метод синтезу законів зміни кутової швидкості ротора та струму в якорі тягового електродвигуна постійного струму електропривода трамвая, які забезпечують мінімум витрат електричної енергії електроприводом під час руху трамвая від однієї зупинки до наступної на горизонтальній ділянці маршруту з його номінальним навантаженням або навантаженням, більшим за номінальне. 2. Синтезовано математичні моделі для кутової швидкості обертання ротора тягового електродвигуна та для струму в його якірному колі, які забезпечують мінімум витрат електроенергії в задачі оптимізації руху трамвая між сусідніми зупинками на горизонтальній ділянці маршруту при його номінальному завантаженні або завантаженні, більшому за номінальне.

ЛІТЕРАТУРА

1. Петров Ю.П. Вариационные методы оптимального управления. – Ленинград: Энергия. – 1965. – 220 с.

2. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Друга ітерація алгоритму побудови математичних моделей в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 5. – С. 43–49.

3. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Математична модель кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням для задач оптимізації // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 1. – С. 45–47.

Стаття надійшла 12.04.2008 р.