

УДК 681.511.43

## СТРУКТУРНИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЛЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

*Полилов Е.В., к.т.н., доц., Солдатенко Н. А., асп.  
Донбасский государственный технический университет  
94204, г. Алчевск, пр-т. Ленина, 16  
E-mail: egor\_polilov@mail.ru*

Розроблені ефективні алгоритми і структури релейних систем автоматичного регулювання положення і кута відхилення зворотного маятника у фазовому просторі канонічних координат, які забезпечують високу точність підтримки стрижня маятника у вертикальному положенні у всіх можливих режимах позиціонування возика (мінімізація статичної і динамічної помилок), а також квазіінваріантність до координатних і параметричних збурень.

**Ключові слова:** зворотний маятник, простір канонічних координат.

Effective algorithms and structures of the relay systems are developed automatic adjustments of position and corner of rejection of reverse pendulum in phase space of canonical co-ordinates which provide high exactness of withholding of bar of pendulum upended in all of the possible modes of keeping of light cart (minimization of static and dynamic errors), and also kvaziinvariantnost' to co-ordinate and self-reactance indignations.

**Key words:** reverse pendulum, space of canonical koorlinat.

**Введение.** Новые задачи управления сложными кинематическими механизмами обусловлены появлением робототехнических систем нетривиальной конструкции, к которым относятся роботы избыточной структуры, шагающие и многоколесные механизмы, маятнико-подобные и гироскопические системы. Несмотря на ограниченные функциональные возможности таких систем, они оказываются вполне пригодны для решения целого ряда специфических задач. К последним относятся задачи стабилизации положения неуправляемого конечного звена манипуляционного робота или робота нетривиальной конструкции (типа маятника на подвижной основе, например, маятника Фуруты), задачи стабилизации центра тяжести шагающего механизма, стабилизации положения многоканальной гироскопической системы, а также соответствующие задачи поддержания их колебательных движений или траекторного управления.

С точки зрения теории управления рассматриваемый класс механических объектов может быть отнесен к не полностью управляемым многоканальным объектам, а соответствующие задачи управления - к задачам частичной стабилизации.

**Анализ предыдущих исследований.** Анализ существующих принципов и способов построения систем управления перевёрнутым маятником показал, что для управления перевёрнутым маятником используются следующие способы управления: управление с помощью пропорциональной обратной связи, управление с помощью обратной связи по полному вектору состояния, управление при помощи наблюдающего устройства [1]. Данные САР

способны удержать перевёрнутый маятник в вертикальном положении при различных сигналах задания. Каждый из предлагаемых способов обладает определёнными достоинствами и недостатками. Но всех их объединяет один недостаток: чувствительность к параметрическим и координатным воздействиям.

**Цель работы** – синтезировать релейные систему автоматического регулирования положения обратного маятника (САРП-ОМ) и систему автоматического регулирования угла обратного маятника САРУ-ОМ методами релейно-модального управления и аналитического конструирования регуляторов в фазовом пространстве канонических координат с целью доказательства возможности применения алгоритмов для стабилизации маятника, а также обеспечения необходимой точности воспроизведения заданных траекторий движения и степени чувствительности к параметрическим и координатным возмущениям.

**Материал и результаты исследования.** Рассмотрим в общем виде задачу синтеза релейного регулятора перемещения перевёрнутого маятника. При структурно-алгоритмическом синтезе релейной САРП-ОМ полагаем, что математическая модель объекта управления представлена автономной системой линейных дифференциальных уравнений в форме Коши в матричном представлении [2]:

$$p\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u, \quad y_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [\Delta\xi_1 \ \Delta\xi_2 \ \Delta\xi_3 \ \Delta\xi_4]^T$  - вектор координат состояния системы;  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$  - матрица динамики системы [2] размерностью  $4 \times 4$ ;

$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \mathbf{K} \ b_4]^T$  - вектор-столбец коефіцієнтів управління;  $u$  - скалярна функція управління;  $y_i$  - регулюєма переменная в каждом  $i$ -том контуре регулювання;  $\mathbf{e}_i$  - вектор коефіцієнтів вихода,  $i$ -тый элемент которого равен единице при равенстве нулю остальных.

Заменой на координаты возмущённого движения  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$  система (1) может быть приведена к виду:

$$p\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{b}u, \quad \eta_i = \mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\eta}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{A} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \mathbf{K} \ \eta_4]^T$  - вектор-столбец координат возмущённого состояния системы.

При синтезе регулятора перемещения обратного маятника в качестве выходной регулируемой переменной принята координата  $y_1$ . Сокращение процедуры синтеза алгоритма управления возможно путем перехода от нормальной формы записи системы уравнений (2) к канонической [3]. Математическую модель объекта управления в каноническом пространстве возмущённого движения представим в виде:

$$\begin{aligned} p\mathbf{x} &= \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{e}_n u; \quad \eta_1 = \mathbf{f}^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{e}_n &= [0 \ 0 \ \mathbf{K} \ 1]^T; \\ \mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \mathbf{K} & -g_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}$  - вектор координат возмущённого движения канонической системы;  $\mathbf{f}^T = [f_1 \ f_2 \ \mathbf{K} \ f_4] = \mathbf{e}_1^T \mathbf{M}$  - соответственно матрица динамики и векторы коэффициентов входа и выхода этой системы.

К системе (1) применима процедура аналитического конструирования регуляторов (АКР), в соответствии с которой для функционала качества, заданного в виде положительно определенной симметрической квадратичной формы:

$$J = \int_0^{\infty} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\eta} dt, \quad \mathbf{W}^T = \mathbf{W}, \quad (4)$$

оптимальное управление  $u^*$  ищется как решение основного функционального уравнения Р. Беллмана [8]:

$$\inf \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\eta} \right] = 0, \quad (5)$$

содержащего функцию Ляпунова

$$V = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}^T = \mathbf{D}. \quad (6)$$

В случае если область определения управляющих функций ограничена кусочно-непрерывными функциями, удовлетворяющими условию  $|u| \leq 1$ , то алгоритм управления может быть представлен в

виде:

$$u^*(\boldsymbol{\eta}) = -\text{sign}(\mathbf{b}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\eta}). \quad (7)$$

Введя обозначение  $\mathbf{k}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{D}$ , алгоритм управления (7), минимизирующий функционал качества (4), можно представить как знаковую функцию от линейной комбинации координат управляемой системы:

$$u^*(\boldsymbol{\eta}) = -\text{sign}(\mathbf{k}^T \boldsymbol{\eta}). \quad (8)$$

Матрица  $\mathbf{D}$ , входящая в алгоритм оптимального управления (7) ищется из матричного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}^T \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A} = -\mathbf{W}, \quad (9)$$

определяющего стабилизирующие свойства управления, т.е. выполнение условия  $\boldsymbol{\eta}(\infty) = 0$ .

Для симметрических заданной  $\mathbf{W}$  и искомой  $\mathbf{D}$  матриц решение уравнения (9) может быть найдено согласно формализованной процедуре, предложенной Е.А. Барбашиным [9, 10]. Согласно этой методике, составив из элементов  $d_{ij}$  симметрической матрицы  $\mathbf{D}$  вектор

$$\mathbf{d} = [d_{11} \ d_{12} \ \mathbf{M} \ d_{1n} \ d_{22} \ d_{23} \ \mathbf{M} \ d_{2n} \ \mathbf{M} \ d_{nn}]^T \quad (10)$$

и соответственно из элементов  $\omega_{kl}$  симметрической матрицы  $\mathbf{W}$  вектор

$$\boldsymbol{\omega} = [0,5\omega_{11} \ \omega_{12} \ \mathbf{M} \ \omega_{1n} \ 0,5\omega_{22} \ \omega_{23} \ \mathbf{M} \ \omega_{2n} \ \mathbf{M} \ 0,5\omega_{nn}]^T, \quad (11)$$

выражению (9) можно поставить в соответствие линейное векторное алгебраическое уравнение

$$\mathbf{C} \mathbf{d} = -\boldsymbol{\omega}, \quad (12)$$

где элементы  $c_{ij,kl}$  матрицы  $\mathbf{C}$  определяются по следующим соотношениям:

$$c_{ij,kl} = c_{ji,kl} = c_{ji,lk}; \quad c_{ij,kl} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \neq k \neq l; \\ g_{jk} & \text{при } j = l, \ i \neq k; \\ g_{ii} + g_{kk} & \text{при } i = k, \ j = l, \ i \neq j; \\ g_{ii} & \text{при } i = j = k = l. \end{cases} \quad (13)$$

Решая уравнение (12) по правилу Крамера коэффициенты  $d_{ij}$  функции Ляпунова (6) можно найти по формуле

$$d_{ij} = -\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \quad (14)$$

где  $\Delta = \det \mathbf{C}$  - главный определитель уравнения,  $\Delta_{ij}$  - дополнительный определитель, получаемый из  $\Delta$  при замене элементов столбца  $ij$  соответствующими элементами вектора  $\boldsymbol{\omega}$ .

В виду относительно сложной индексации элементов матриц  $\mathbf{C}$ , для составления  $\Delta$  и  $\Delta_{ij}$  удобно использовать определитель Барбашина  $\Delta_B$  [8], включающий вспомогательные строку и столбец, со-

стоящие из элементов векторов  $\mathbf{d}$  и соответственно, и заполняемый в соответствии с выражением (13)

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{d}^T \\ \boldsymbol{\omega} & \mathbf{C} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Таким образом, найдя из определителя Барбашина  $\Delta$  и  $\Delta_{ij}$  можно пользуясь выражением (14) заполнить матрицу  $\mathbf{D}$  и далее определить вектор обратных связей  $\mathbf{k}$  алгоритма управления (8). Необходимо отметить, что, так как вектор  $\mathbf{e}_n$  содержит только один  $n$ -ый не нулевой элемент, то в коэффициенты обратных связей  $k_1, k_2, \dots, k_n$  войдут исключительно элементы  $n$ -ой строки матрицы  $\mathbf{D}$ , т.е. элементы  $d_{nj}$ .

Итак, согласно постановке задачи АКР, необходимо среди допустимых управлений  $u \leq |U_m|$  найти оптимальное управление  $u(\eta)$ , обеспечивающее минимум функционалу (4). Алгоритм оптимального управления ищется в виде (8).

В результате структурно-алгоритмических преобразований применительно к релейной системе управления получим алгоритм управления регулятора натяжения в фазовом пространстве основных регулируемых координат электропривода и их производных:

$$U = -\text{sign} \left( \mathbf{b} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = -\text{sign}(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}) \quad (16)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{V} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]$  - вектор коэффициентов обратных связей;  $V(\mathbf{x})$  - функция Ляпунова.

Принимаем следующий функционал качества:

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\eta}) dt. \quad (17)$$

Для определения коэффициентов функции Ляпунова по формуле (14) необходимо решить матричное уравнение (9)

В первом столбце помещаются коэффициенты квадратичной формы  $\mathbf{W}$ .

Для нахождения коэффициентов вектора в соответствии с формулой (14), запишем главный и дополнительные определители и вычислим их с учётом принятого критерия качества  $I_1$ :

Коэффициенты обратных связей в алгоритме управления (16) выражается в аналитической форме через параметры объекта управления и принятого функционала качества:

$$\lambda_{24} = \frac{-g_1 g_0^2 q_{44} + g_1 g_2 q_{11} - g_3 q_{22} g_2 g_0 - g_3 q_{33} g_0^2 + g_1 g_0 q_{22} + g_3 q_{11} g_0 - g_3 q_{11} g_2^2}{(g_3^2 g_0 - g_1 g_2 g_3 + g_1^2) q_{11}};$$

$$I_{14} = 1;$$

$$\lambda_{34} = \frac{-\left( g_0 q_{22} g_3^2 + g_0 q_{33} g_1 g_3 + g_0 g_1^2 q_{44} + q_{11} g_2 g_3^2 - q_{11} g_1 g_3 \right)}{(g_3^2 g_0 - g_1 g_2 g_3 + g_1^2) q_{11}};$$

$$\lambda_{44} = \frac{-\left( -q_{44} g_3 g_0^2 + g_3 g_0 q_{22} + q_{33} g_0 g_1 + g_0 q_{44} g_2 g_1 + q_{11} g_3 g_2 - q_{11} g_1 \right)}{(g_3^2 g_0 - g_1 g_2 g_3 + g_1^2) q_{11}}.$$

Матричная структурная схема релейной системы управления, в которой реализуется найденный закон управления, приведена на рис. 1.

Следует отметить, что в случае практической реализации синтезированного алгоритма релейную САП-ОМ необходимо дополнить внутренним контуром стабилизации угла поворота маятника (САРУ-ОМ) и контуром регулирования скорости перемещения маятника (САРС-ОМ). В нормальном режиме работы релейной САП-ОМ без срыва скользящего режима, скольжение внутренних регуляторов скорости и угла поворота маятника подчинено внешнему регулятору перемещения..

Для анализа работоспособности синтезированных релейных САП-ОМ на основании математического описания [2] была составлена цифровая математическая модель и проведено цифровое моделирование в среде моделирования динамических систем MATLAB Simulink.

Исследовались переходные процессы позиционирования и слежения за заданной траекторией (линейно нарастающий, пилообразный и синусоидальный сигнал, рис. 3-5) центра масс обратного маятника.

Полученные графики переходных процессов подтверждают высокую эффективность синтезированных алгоритмов управления. Из всех синтезированных алгоритмов позиционирования выбор конкретной САП-ОМ должен производиться в зависимости от требований, предъявляемых разработчиками к точности воспроизведения заданной траектории движения центра масс маятника.

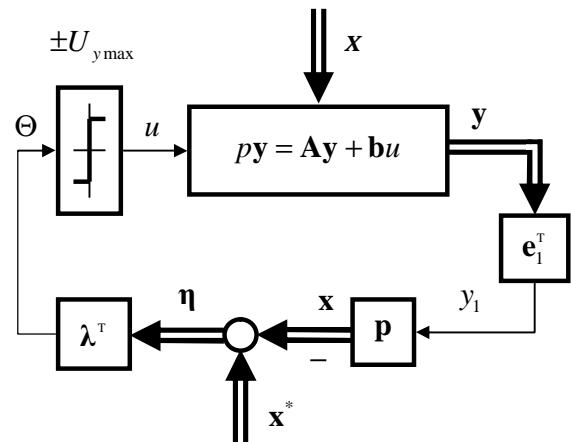


Рисунок 1 – Матричная структурная схема релейной САП-ОМ, синтезированной в фазовом пространстве канонических координат

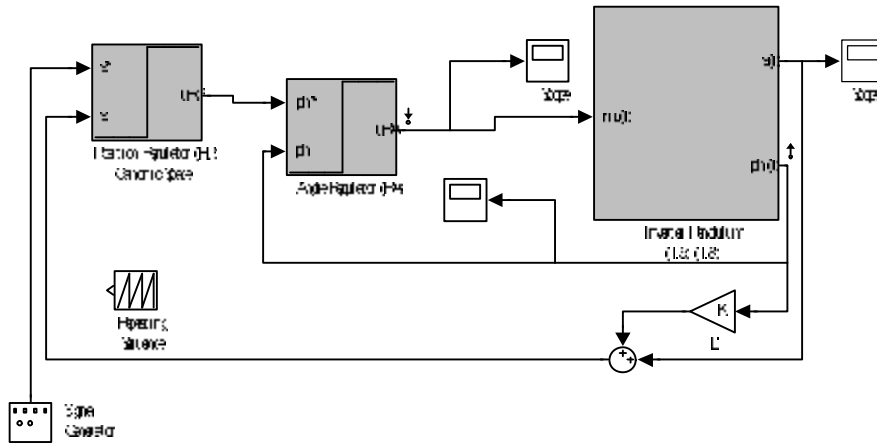


Рисунок 2 – Цифрова математическа модель релейної САПІ-ОМ, синтезованої в фазовому просторі каноніческх координат

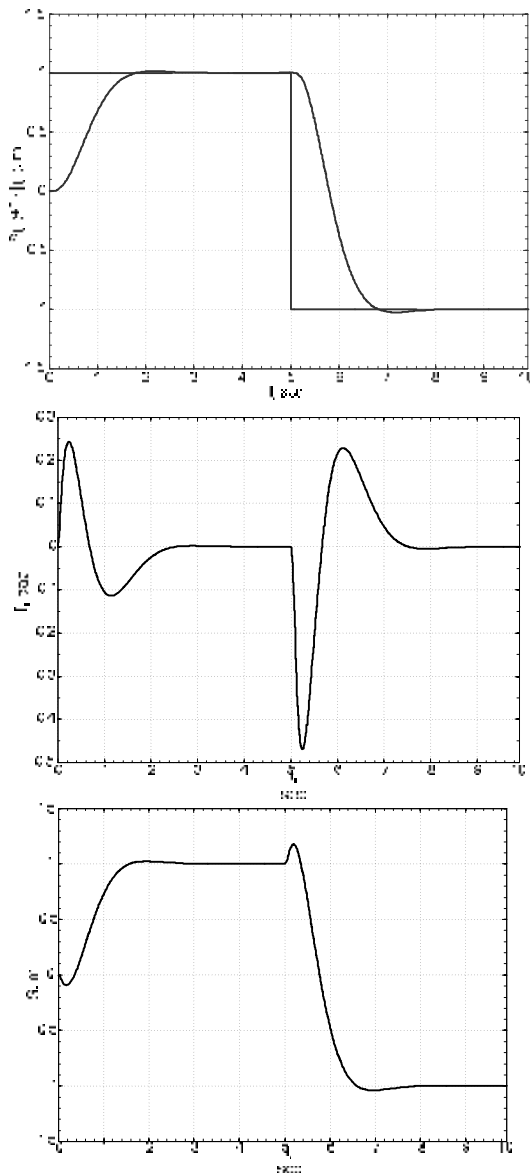


Рисунок 3 – Графіки перехідних процесів в релейній САПІ-ОМ, синтезованої в фазовому просторі каноніческх координат

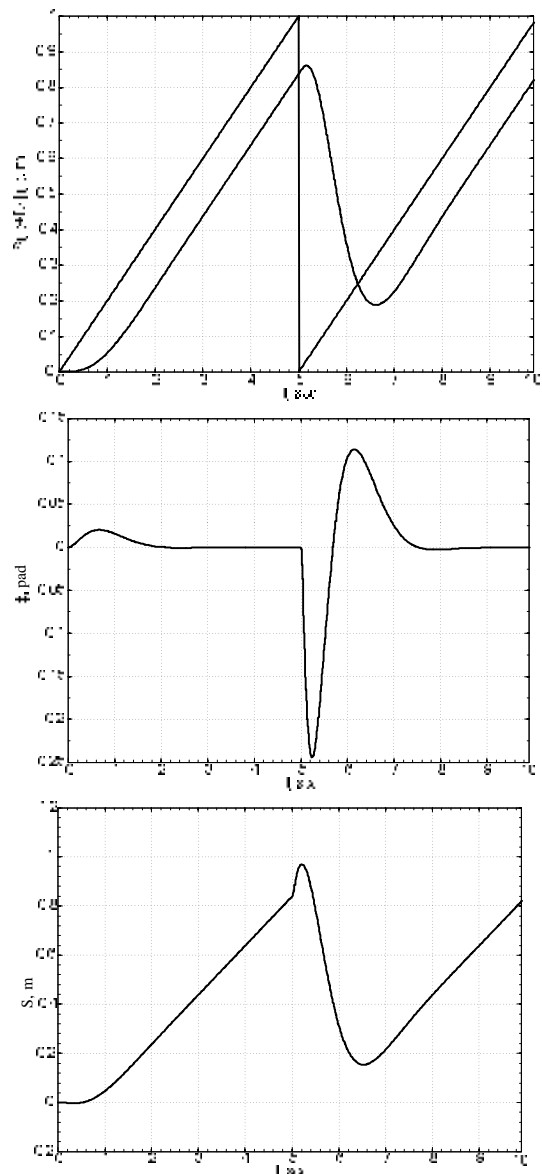


Рисунок 4 – Графіки перехідних процесів в релейній САПІ-ОМ, синтезованої в фазовому просторі каноніческх координат

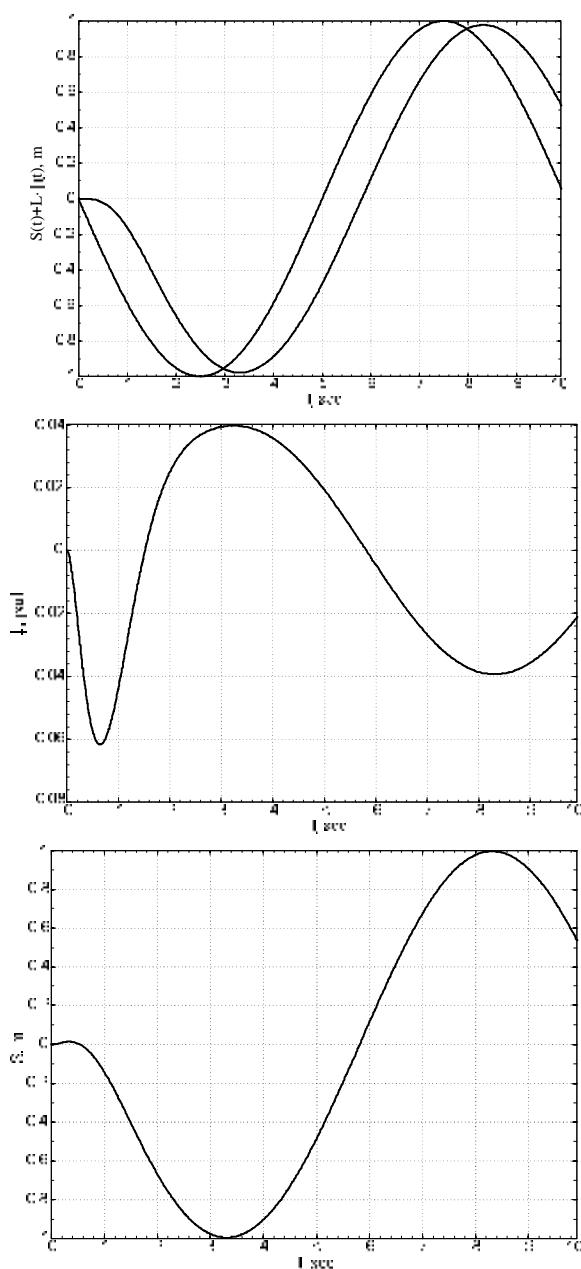


Рисунок 5 – Графики переходних процесів в релейній САП-ОМ, синтезованій в фазовому просторі канонічних координат

**Выводы.** Применительно к объекту управления тележка – перевёрнутый маятник показана возможность использования релейных систем управления. Синтезированные алгоритмы и структуры релейных САП-ОМ и САРУ-ОМ могут быть использованы при проектировании всех объектов, в которых центр масс и точка приложения силы не совпадают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Квакернаак Х, Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 653 с.
2. Полилов Е.В., Солдатенко Н.А., Щёлоков А.Г. Математическое описание нелинейной динамической системы тележка - обратный маятник // 36-к наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електроприводу» / Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. – С. 275 – 279.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1970. – 460 с.
4. Яблонь В.П. Синтез релейных систем следящего электропривода повышенной точности с низкой чувствительностью к параметрическим и координатным возмущениям: Дис. канд. техн. наук: 05.09.03. – Донецк, 1999. – 207 с
5. Долголенко Ю.В. Скользящие режимы в релейных системах непрямого регулирования // Тр. 2-го всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. - М.: АН СССР, 1955. – Т. 1. – С. 428-438.
6. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. – М.: Сов. радио, 1977.
7. Осичев А.В., Котляров В.О., Марков В.С. Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе // Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. Труды науч.-техн. конф. Крым, Алушта, 15-20 сентября 1997. – Харьков, 1997. – С. 159-161.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: Изд. ин. лит., 1960. - 232 с
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. - М.: Наука, 1970. – 240 с.
10. Барбашин Е.А. О построении функций Ляпунова // Дифференциальные уравнения, 1968, Т. 4, № 12. – С. 2127-2158.

Стаття надійшла 20.04.2008 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., проф.  
Родькіним Д.Й.