

УДК 621.313.333

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ КОНЦЕВЫХ ЭФФЕКТОВ**

*Набиев Ф.М., д.т.н., доц.*

*Азербайджанская государственная нефтяная академия*

*Аз.1007, г. Баку, пр. Азадлык, 111/12*

*E-mail: fuadnabi@gmail.com*

Розглядається математична модель двофазного лінійного асинхронного двигуна на базі теорії магнітопов'язаних ланцюгів з урахуванням кінцевих ефектів, наслідком яких є асиметрія фазних струмів і зменшення електромагнітних сил тяги. Аналізується природа кінцевих ефектів з позиції теорії ланцюгів. Приводиться порівняльний аналіз характеристик асинхронних двигунів лінійного та обертального рухів.

**Ключові слова:** первинний і вторинний кінцеві ефекти, асиметрія фазних струмів.

The mathematical model of the two-phase linear asynchronous motor on the basis of the magnetic circuits theory, in view of end effects which consequence are asymmetry of phase currents and reduction of electromagnetic forces of draft is considered. The nature of end effects has been analyzed in terms of the circuit theory. The comparative analysis of characteristics of asynchronous motors of linear and rotary movements has been conducted.

**Key words:** primary and secondary end effects, asymmetry of phase currents.

**Введение.** Двухфазные линейные асинхронные двигатели (ЛАД) преимущественно применяются при пофазно-токовом управлении, где, для получения требуемой формы той или иной характеристики, при помощи системы автоматического управления преобразователем частоты (САУ ПЧ) задается ток определенной частоты на нужную фазу. Определение законов управления связано адекватной математической моделью.

**Анализ предыдущих исследований.** Двухфазные линейные асинхронные двигатели в теоретическом плане являются сравнительно малоизученными. В настоящее время в анализе ЛАД преимущественно применяются два типа моделей: а) на базе теории поля, где концевые эффекты рассматриваются на основе волновых процессов при симметричных фазных токах; б) на базе теории цепей, которая применяется в основном для изучения динамических режимов без учета концевых эффектов. При этом трехфазная, в общем случае, несимметричная машина часто анализируется в двухфазной симметричной координатной системе, которая исключает возможность учета особенностей этих машин. Для несимметричных машин неправомерно вести расчет для одной фазы, а потом отнести их к остальным фазам, т.к. все фазы находятся в разных положениях в магнитном отношении и имеют различные степени асимметрии.

**Цель работы** – создание математической модели на основе теории цепей, которая позволит учитывать такие особенности двухфазных линейных двигателей, как концевые эффекты, асимметрию фазных токов и неравномерное распределение электромагнитных сил по длине индуктора.

**Материал и результаты исследования.** Рассмотрим математическую модель ЛАД с учетом концевых эффектов, которые являются главной осо-

бенностью двигателя. Отметим, что другие проблемы как увеличенный и неравномерный немагнитный зазор, силы притяжения между индуктором и вторичным элементом, поперечный краевой эффект, зубчатость сердечников, наличие высших гармоник и т.д. имеют место также в других типах асинхронных машин и достаточно изучены. Поэтому в данной работе они не рассматриваются, для выявления некоторых закономерностей во внимание принимаются только концевые эффекты.

Концевой эффект в ЛАД рассматривается в виде первичного и вторичного концевых эффектов.

**Первичный концевой эффект.** Первичный концевой эффект существует при неподвижном вторичном элементе и связан асимметрией электромагнитных параметров. В средней зоне двухфазных двигателей при ненасыщенном состоянии асимметрия параметров отсутствует, т.к. взаимные индуктивности между обмотками при их сдвиге фаз на электрический угол  $\pi/2$ , равны нулю [1]. Это также видно из картин магнитного поля (рис. 1) – плоскость фазы ВУ не пересекается в одном направлении магнитными линиями фазы АХ и катушки обеих фаз по длине магнитопровода при неподвижном вторичном элементе находятся практически в одинаковых положениях в магнитном отношении.

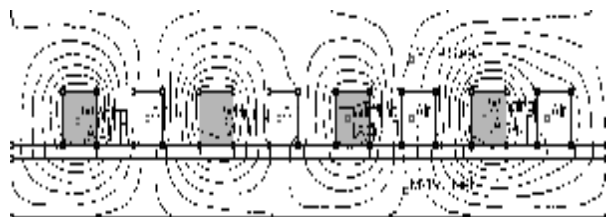


Рисунок 1 – Картина магнитного поля двухфазного ЛАД при возбуждении фазы АХ

Это положение не распространяется на крайние зоны двухфазного ЛАД. Как видно из рис. 2, плоскость фазы ВУ пересекается магнитными линиями полуфазы Х, которая наводит определенную э.д.с., что говорит о существовании взаимной индукции между фазами А и В при их расположении под 90°.

В случае, когда полукатушки соединены последовательно, индуцированная э.д.с. в виде суммы э.д.с. полукатушек минимальна, т.к. магнитные силовые линии полуфазы Х имеют противоположные направления по обеим ее сторонам, и индуцированные э.д.с. при этом компенсируют друг друга.

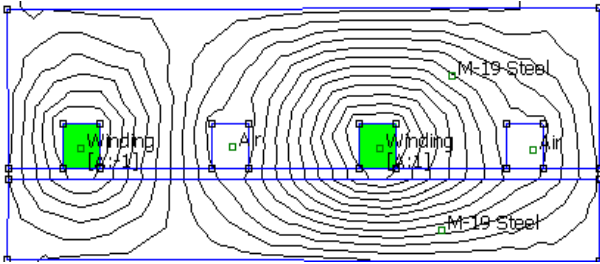


Рисунок 2 – Картина магнитного поля крайней зоны двухфазного ЛАД при возбуждении фазы АХ

В случае параллельного соединения, при учете насыщения, индуцированные э.д.с. отличаются друг от друга, и между разноименными фазами появляется взаимная индуктивность.

Следовательно, в крайних зонах двухфазных двигателей существует первичный концевой эффект, однако он проявляется значительно слабее, чем у трехфазных двигателей. Это явление должно быть учтено при составлении математической модели путем введения слагаемых, содержащих взаимные индуктивности между разноименными фазами.

Полные индуктивности крайних и средних элементарных двигателей во многих конструкциях отличаются незначительно, а во многих других случаях могут быть симметрированы некоторыми конструктивными мерами, например, применением шунтирующих участков, увеличением ширины крайних зубцов, или, другими словами, уменьшением индукции и торцевых рассеяний магнитного поля.

*Вторичный концевой эффект.* Под вторичным концевым эффектом понимается явление, связанное с движением вторичного элемента, при котором систематически происходит вход вторичных контуров в магнитное поле и выход из него. Этот эффект, иногда также называют эффектом "входа-выхода".

Рассмотрим приведенный вторичный элемент, который подразумевает аналогичность обмоток индуктора и вторичного элемента.

Для простоты представления рассмотрим процесс "входа-выхода" в двухфазном одностороннем ЛАД в двухкоординатной заторможенной системе. ЛАД представим в виде элементарных двигателей с числом полюсов каждого  $P=1$  [2]. Направление движения выберем слева направо.

Запишем дифференциальные уравнения равнове-

сия напряжений для  $j$ -го элементарного двигателя:

$$\begin{aligned} U_{aj} &= i_{aj}R_{aj} + \frac{d\psi_{aj}}{dt} + v\psi_{y(j-1)}; v = \frac{\pi}{\tau}V; \\ U_{bj} &= i_{bj}R_{bj} + \frac{d\psi_{bj}}{dt} - v\psi_{aj}. \end{aligned} \quad (1)$$

Математически не сложно доказать, что э.д.с. движения по фазе в двухфазных ЛАД создается потокосцеплением отстающей по ходу движения фазой.

Физически это также очевидно, так как контуру, чтобы "попасть" в положение фазы а необходимо преодолеть зону фазы У. Трансформаторная э.д.с. фазы а в виде  $(dY/dt)$  отстает от потокосцепления на угол  $\pi/2$  и она совпадает по направлению с э.д.с. движения, индуцированной при пересечении фазы в, отстающей по ходу движения, и поэтому они могут складываться.

Уравнения (1) аналогичны уравнениям обычных асинхронных машин вращательного движения. Отличием является только то, что в этих уравнениях э.д.с. движения каждой фазы индуцируется потокосцеплением предыдущей фазы по ходу движения вторичного элемента. В принципе в обычных асинхронных машинах она также создается отстающей фазой. Однако в замкнутых симметричных машинах э.д.с. движения от всех фаз одинаковы, поэтому, поскольку это не имело практического значения, осталось без внимания. А в линейных двигателях э.д.с. движения в каждом элементарном двигателе отличается от э.д.с. следующего двигателя и это является основным принципиальным различием между двигателями линейного и вращательного движений.

Записав (1) для  $j=1$ -го элементарного двигателя, заметим, что в выражении для  $U_{a1}$  вместо компоненты  $\psi_{y(j-1)}$  стоит  $\psi_{\Lambda}$ , так как отстающим при этом является левый входящий контур.

$$\left. \begin{aligned} U_{a1} &= i_{a1}R_{a1} + \frac{d\psi_{a1}}{dt} + v\psi_{\Lambda}; \\ U_{b1} &= i_{b1}R_{b1} + \frac{d\psi_{b1}}{dt} - v\psi_{a1}; \\ U_{x1} &= i_{x1}R_{x1} + \frac{d\psi_{x1}}{dt} + v\psi_{b1}; \\ U_{y1} &= i_{y1}R_{y1} + \frac{d\psi_{y1}}{dt} - v\psi_{x1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Потокосцепление левого контура  $\psi_{\Lambda}$  определим в общем случае следующим образом:

$$\psi_{\Lambda} = L_{\Lambda}i_{\Lambda} + M_{\Lambda\Lambda}i_{\Lambda} + M_{\Lambda a}i_a, \quad (3)$$

где  $i_{\Lambda}$ ,  $i_a$ ,  $i_a$  – соответственно токи левого контура, фаз А и а;  $L_{\Lambda}$  – полная индуктивность левого контура;  $M_{\Lambda\Lambda}$ ,  $M_{\Lambda a}$  – соответственно взаимные индуктивности между левым контуром и контурами фаз А и а. Вышеуказанные индуктивности связаны с магнитными полями торцевого рассеяния. При наличии ненасыщенных магнитопроводов в ряде случаев, особенно в случае применения ЛАД с немагнитным вторичным элементом, практически можно считать, что  $M_{\Lambda\Lambda} = 0$ ,  $M_{\Lambda a} = 0$ .

Тогда (3) примет следующий вид:  $\Psi_A = L_A i_A$ . В таком случае потокосцепление левого контура создается током растекания. Потокосцепления, образованные токами растекания и полными индуктивностями, также во многих случаях можно не учитывать, т.к., например, в цилиндрических ЛАД с вторичным элементом, изготовленным из чередующихся магнитных и электрически не связанных электропроводящих колец, ток вторичного элемента не может распространяться вне активной зоны машины и тогда  $\Psi_n = 0$ . Аналогичная ситуация получится если стержни вторичного элемента укладывать через ярмо у двустороннего двигателя. В таком случае  $\Psi_n$  также по сравнению с  $\Psi_{a1}$  оказывается незначительным и его можно не учитывать. В этом случае выражение для  $U_{a1}$  в (2) имеет следующий вид:

$$U_{a1} = i_{a1} R_{a1} + \frac{d\Psi_{a1}}{dt}. \quad (4)$$

(4) является уравнением режима короткого замыкания. Это свидетельствует о том, что даже при установившейся работе ЛАД, его входная фаза первого полюса (входной элементарный двигатель) всегда находится в режиме короткого замыкания. Однако переходный процесс не завершается на протяжении первого полюса, который обычно называют переходной зоной. Он передается через составляющие э.д.с. движения в системе уравнений (2)  $\omega\Psi_{y(j-1)}$ ,  $\omega\Psi_a$ ,  $\omega\Psi_x$ ,  $\omega\Psi_y$  на последующие элементарные двигатели, в ряде случаев может достичь выходного конца ЛАД (последнего элементарного двигателя). Это обычно имеет место в высокоскоростных малополюсных ЛАД. Влияние переходной составляющей э.д.с. затухает по мере удаления от входного конца, что соответствует теории статических режимов ЛАД, согласно которой волна входного концевого эффекта имеет затухающий характер по длине индуктора. Поэтому определить длину переходной зоны, одинаковой для различных двигателей является неправомерным, так как в каждом случае, в зависимости от соотношений электромагнитных параметров, она имеет разные величины и охватывает определенное число полюсов.

В случае применения ЛАД с вторичным элементом, имеющим ферромагнитный сердечник, потокосцепления левого контура следует рассчитывать по (3). Численные расчеты показывают, что в этом случае  $\Psi_n$  имеет также небольшую величину по сравнению с потокосцеплениями фаз элементарных двигателей. Однако, в точных расчетах, особенно при наличии шунтирующих участков и компенсационных обмоток на краях, их необходимо учитывать. В этом случае первый полюс оказывается в промежуточном положении между рабочим режимом и режимом короткого замыкания. Записав (2) для всех элементарных двигателей, с учетом (3) и (4) в зависимости от схемы соединения катушек фаз, получим уравнения для двухфазного ЛАД с учетом вторичного концевого эффекта.

*Математическая модель двухфазного ЛАД при*

*последовательных обмотках индуктора и вторичного элемента.* Во многих случаях катушки обмоток индуктора, принадлежащие одноименным фазам, имеют последовательное соединение. Известны также конструкции вторичных элементов, содержащие последовательно соединенные катушки, или состоящие из изолированных друг от друга спрессованных проводов. Как было сказано выше, концевые эффекты протекают в основном в цепях вторичного элемента. В электрических цепях индуктора они проявляются через потокосцепления вторичных контуров. Поэтому уравнения запишем для вторичных цепей, имея в виду, что вид уравнений для цепей индуктора остается неизменным.

В случае, когда вторичный элемент имеет обмотку с последовательным соединением катушек, уравнение напряжения фазы а приобретает следующий вид:

$$U_a = \sum_{j=1}^P U_{aj} = i_a \sum_{j=1}^P R_{aj} + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^P \Psi_{aj} + v \sum_{j=1}^P \Psi_{y(j-1)}. \quad (5)$$

Если считать, что потокосцепления одноименных фаз элементарных двигателей при равенстве токов симметричны и равны  $|\Psi_{ij}| = |\Psi_j|/P$ , где  $\Psi_{ij}$  – потокосцепление i-ой фазы j-го элементарного двигателя, записав уравнения для всех контуров, имея в виду, что для элементарного двигателя  $j=1$ ,  $\Psi_{y(j-1)} = \Psi_A$ , получим:

$$\begin{aligned} U_{AX} &= i_{AX} R_{AX} + \frac{d\Psi_{AX}}{dt}; \\ U_{BY} &= i_{BY} R_{BY} + \frac{d\Psi_{BY}}{dt}; \\ U_{ax} &= i_{ax} R_{ax} + \frac{d\Psi_{ax}}{dt} + v(\Psi_{by} \frac{P-1}{P} + \Psi_A); \\ U_{by} &= i_{by} R_{by} + \frac{d\Psi_{by}}{dt} - v\Psi_{ax}; \\ U_{n1} &= i_{n1} R_{n1} + \frac{d\Psi_{n1}}{dt} + v\Psi_{n2}; \\ U_{n1} &= i_{n1} R_{n1} + \frac{d\Psi_{n1}}{dt} - v\Psi_{yp}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) являются дифференциальными уравнениями напряжений первичных и вторичных цепей двухфазного ЛАД с учетом вторичного концевого эффекта при последовательном соединении одноименных фаз всех элементарных двигателей. При этом считается, что вторичные контуры имеют аналогичные соединения, что и обмотки индуктора.

Потокосцепления обмоток следует записать для входных, средних и выходных элементарных двигателей. Согласно рис. 1 потокосцепления для крайних элементарных двигателей запишутся в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A & M_{AB} & M_{Aa} & M_{Ab} \\ M_{AB} & L_B & M_{Ba} & M_{Bb} \\ M_{Aa} & M_{Ba} & L_a & M_{ab} \\ M_{Ab} & M_{Bb} & M_{ba} & L_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_a \\ I_b \end{pmatrix},$$

а для средних элементарных двигателей:

$$\begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \\ \Psi_a \\ \Psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A & 0 & M & 0 \\ 0 & L_B & 0 & M \\ M_{Aa} & 0 & L_a & 0 \\ 0 & M_{Bb} & 0 & L_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_a \\ I_b \end{pmatrix},$$

где  $M_{Aa} = M_{Bb} = M$  – взаимные индуктивности между одноименными фазами индуктора и вторичного элемента;  $L_A = L_B = L_1$ ,  $L_a = L_b = L_2$  – соответственно полные индуктивности обмоток фаз индуктора и вторичного элемента.

К этим уравнениям необходимо добавить еще уравнения электромагнитных сил, которые также записываются для элементарных двигателей с учетом особенностей распределения обмоток:

$$F_{Tj} = \frac{\pi}{\tau} M (i_{Aj} i_{yj-1} + i_{Bj} i_{aj}).$$

*Математическая модель статических режимов.*

Известно, что статические режимы электрических машин являются частным случаем их динамических режимов. Поэтому уравнения статических режимов можно получить из дифференциальных уравнений если в них оператор дифференцирования  $\partial/\partial t$  заменит на  $j\omega$ . Прделав эти операции, с учетом того, что для элементарного двигателя в выражении  $U_{aj}$  фигурируют составляющие предыдущего элементарного двигателя  $vM_{Bj-1} \cdot i_{Bj-1}$ ,  $vL_{bj-1} \cdot i_{bj-1}$  и для входного элементарного двигателя  $vM_{Bj-1} \cdot i_{Bj-1} = 0$ ,  $L_{bj-1} \cdot i_{bj-1} = 0$ , получим уравнения статических режимов двухфазного многополюсного ЛАД с учетом того, что  $(R_j + jX_j) = Z_j$ ,  $v(2p-1) = K$ :

$$\begin{pmatrix} U_{Aj} \\ U_{Bj} \\ U_{aj} \\ U_{bj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2pZ_{Aj} & 0 & 2pjX_{Aaj} & 0 \\ 0 & 2pZ_{Bj} & 0 & 2pjX_{Bbj} \\ 2pjX_{Aaj} & KM_{Bj-1} & 2pZ_{aj} & KL_{bj-1} \\ -2pvM_{Aaj} & 2pjX_{Bbj} & -2pvL_{aj} & 2pZ_{bj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Aj} \\ I_{Bj} \\ I_{aj} \\ I_{bj} \end{pmatrix},$$

где  $R_j$ ,  $X_j$ ,  $M_j$ ,  $L_j$  – параметры одной пары полюсов, иными словами, одного элементарного двигателя.

Электромагнитные силы в статических режимах имеют следующее выражение:

$$F_{Tj} = \frac{\pi}{\tau} M \operatorname{Re}(i_{Aj} i_{yj-1} + i_{Bj} i_{aj}).$$

Эта система нелинейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами может быть решена с использованием стандартных программ в среде MATLAB.

В этих уравнениях параметры рассчитываются для одной пары полюсов. Коэффициент  $K$ , учитывающий в интегральной форме концевые эффекты в двухфазных ЛАД, определяется как:  $K = (2P-1)/(2P)$ .

Таким образом, характеристики ЛАД получают в функции числа полюсов. Поскольку входной полюс вторичного элемента находится в режиме, близком к короткому замыканию, и оказывает размагничивающее действие на поле входного полюса индуктора, уменьшая магнитную индукцию на его

входе. Как видно из формул, составляющая э.д.с. движения, фигурирующая в выражении  $U_{aj}$ , вносит определенную асимметрию. Даже при симметричных активных и индуктивных параметрах, работа машины сопровождается асимметрией фазных токов, что способствует уменьшению силы тяги, появлению тормозных сил, дополнительным потерям и снижению энергетических показателей двигателя. Эта асимметрия усугубляется при учете реальной асимметрии фазных параметров входных средних и выходных элементарных двигателей.

На рис. 3-6 приведены сравнительные характеристики ЛАД с последовательными обмотками на индукторе и вторичном элементе при различных числах полюсов, а также характеристик обычных асинхронных машин. Все параметры одинаковы кроме разомкнутости магнитопровода. Как видно из сравнительного анализа характеристик, при учете концевых эффектов в данном двигателе уменьшается как максимальное, так и пусковое значения тяговой силы. При синхронной скорости двигатель развивает некоторую полезную силу. Концевой эффект вносит определенную асимметрию в фазные токи, причем она растет по мере приближения к синхронной скорости. Растут также потребляемые и активные мощности при синхронной скорости.

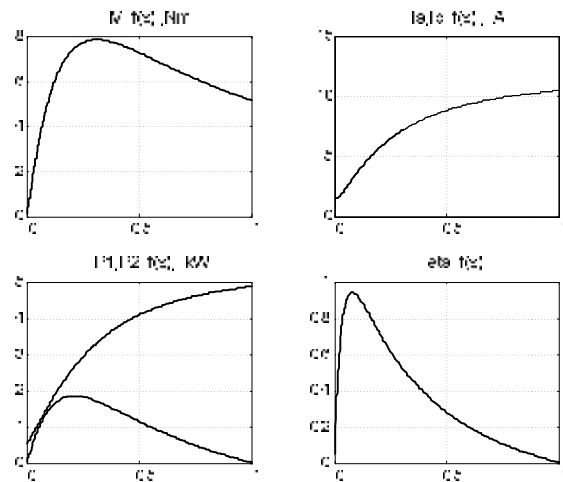


Рисунок 3 – Характеристики обычного асинхронного двигателя

На рис. 4 показаны характеристики аналогичного двухполюсного линейного двигателя. Как видно при этом механическая характеристика двигателя становится более мягкой, тяговая сила уменьшается во всем диапазоне скольжений при резком увеличении тока индуктора. В области синхронной скорости увеличение тока индуктора по сравнению с обычными двигателями достигает 3-4 раза. Также быстро растет асимметрия фазных токов при симметричных фазных параметрах, она достигает 25 % в области синхронной скорости. К.п.д. этого двигателя падает от 0,9 до 0,3.

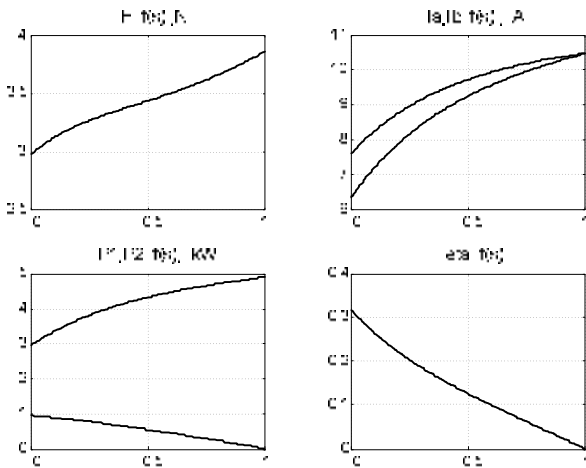


Рисунок 4 – Характеристики линейного асинхронного двигателя,  $2P=2$

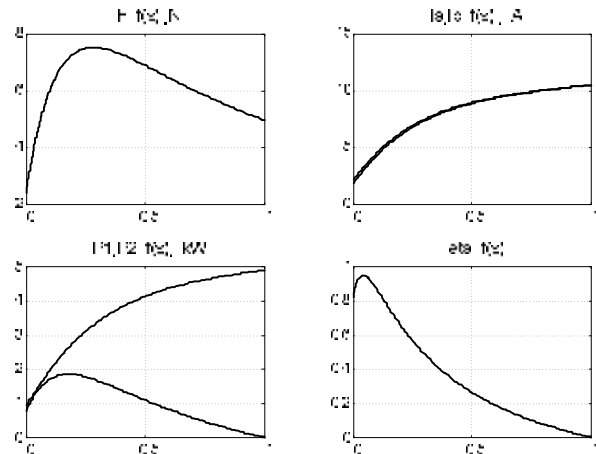


Рисунок 6 – Характеристики линейного асинхронного двигателя,  $2P=14$

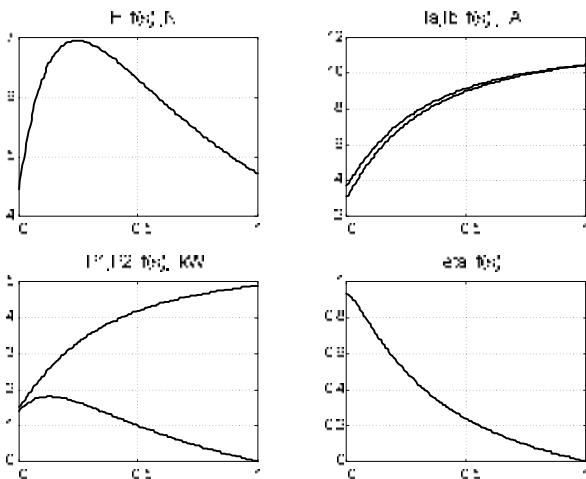


Рисунок 5 – Характеристики линейного асинхронного двигателя,  $2P=6$

По форме характеристики 6-полюсного двигателя (рис. 5) похожи на характеристики обычных машин (рис. 3). Наблюдается значительное улучшение характеристик по сравнению с 2-х полюсным двигателем.

Как видно, характеристики 14 полюсного двигателя (рис. 6) практически близки к характеристикам аналогичного асинхронного двигателя (рис. 3), что доказывает преимущество последовательной обмотки на вторичном элементе.

### Выводы.

1. Первичный концевой эффект в двухфазных ЛАД проявляется значительно слабее. В практических расчетах им можно пренебречь.
2. Вторичный концевой эффект вносит определенную асимметрию в фазных токах, которая усиливается по мере приближения к синхронной скорости.
3. Благодаря концевым эффектам двигатель развивает некоторую полезную силу в области синхронной скорости.
4. Влияние концевых эффектов уменьшается с увеличением числа полюсов.
5. ЛАД с последовательными обмотками индуктора и вторичного элемента имеют наилучшие характеристики по сравнению с массивным и короткозамкнутым вторичным элементом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Набиев Ф.М. Электрические машины. Учеб. пособие для студентов ВУЗов. – М.: ИП РадиоСофт, 2008. – 292 с.
2. Копылов И.П., Набиев Ф.М. Математическое моделирование динамических режимов линейных асинхронных двигателей // Материалы международной конференции по электроприводу «30 лет ИЭП», София, НРБ, 1990. – С. 72-77.

Статья надійшла 7.05.2008 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., проф.  
Родькіним Д.Й.