

УДК 536.24

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІКРОХВИЛЬОВОГО ЗМІЦНЕННЯ  
КЕРАМІЧНИХ МАТЕРІАЛІВ**Яковенко В.О., к.ф.-м.н., доц.***Академія митної служби України**49000, м. Дніпропетровськ, вул. Дзержинського, 2, корп. 1**E-mail: yakovenko@ua.fm*

Построена математическая модель упрочнения керамических материалов под действием энергии электромагнитного поля на основе сплавы. Получено распределение полей температур в твердой и жидкой фазе материала – плавления материала, а также закон движения границы фазового преобразования.

**Ключевые слова:** математическая модель, микроволновая энергия, теплообмен, твердая фаза, жидкая фаза, граница разделения фаз.

The mathematical model of ceramic materials' hardening on the basis of an alloyage under activity of microwave electromagnetic field's energy is constructed. Allocations of fields of temperatures in a firm phase of a material and in a liquid phase (a melt of material) and law of motion of phase change's boundary are gained.

**Key words:** mathematical model, microwave energy, heat exchange, a firm phase, a liquid phase, a demarcation of phases.

**Вступ.** Виробничі і технологічні процеси з застосуванням енергії електромагнітних мікрохвильових полів дозволяють значно збільшувати продуктивність обробки й одержувати якісно нові, не доступні традиційним методам зміцнення, властивості поверхонь: наплавлення, легування, рафінування [1]. Актуальною є проблема мікрохвильового зміцнення при створенні поверхонь матеріалів, конструктивні й експлуатаційні особливості яких вимагають працездатності при високих температурах, у відсутності охолодження і змачення, наприклад, різного роду композитних керамічних покриттів і матеріалів [2, 3].

**Аналіз попередніх досліджень.** У виробництві керамічних матеріалів видалення розчинника або вологи є енергоємним процесом. Мікрохвильове нагрівання також знайшло застосування в процесі спікання. Спікання як процес об'єднання порошкових часток речовини або суміші здійснюється нагріванням до температур нижче точки плавлення компонентів. Підвищення ефективності спікання кераміки надвисокочастотною енергією є актуальною задачею. Електромагнітне поле мікрохвильового діапазону може бути використане як джерело створення теплового поля в діелектричних матеріалах, а також як фактор, що прискорює процеси масопереносу та твердофазових реакцій [4, 5].

**Матеріал і результати дослідження.** Розглянемо нестационарний процес теплообміну при спіканні керамічних матеріалів в умовах фазового перетворення «тверда фаза – рідка фаза», що виникає під дією надвисокочастотного нагріву, тобто відбува-

ється процес спікання порошкових часток матеріалу. Такий процес можна визначити системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка складається з рівнянь Максвелла і рівнянь теплопровідності й має наступний вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \tau}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

$$\frac{\partial(c_i \rho_i t_i)}{\partial \tau} + \mathbf{V}_i \mathbf{r} \nabla t_i = \operatorname{div}(\lambda_i \mathbf{r} \nabla t_i) + q(t_i, \mathbf{E}),$$

де  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  – вектори напруженості електричного та магнітного полів відповідно,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  – вектори електричної та магнітної індукції відповідно,  $\mathbf{j}$  – щільність струму провідності,  $\epsilon_i = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon' - i\sigma/\omega$ ,  $\mu$  – абсолютні діелектрична і магнітна проникності матеріалу відповідно,  $\sigma$  – провідність матеріалу,  $\omega$  – кругова частота,  $c_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплоємності, щільність і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, що залежать від температури і -ої фази,  $\mathbf{V}_i$  – вектор швидкості переміщення і -го матеріалу,  $\mathbf{r} \nabla$  – оператор Гамільтона,  $q = 0,5\omega\epsilon' \operatorname{tg} \delta |\mathbf{E}|^2$  – питома поглинена потужність,  $t_i$  – температура і -го матеріалу,  $\operatorname{tg} \delta = \epsilon''/\epsilon'$  – тангенс кута діелектричних втрат матеріалу.

Наведена система рівнянь доповнюється початковими та граничними умовами, а також умовою на межі розподілу фаз «тверда фаза – рідка фаза».

Слід зазначити, що розв'язок наведеної системи рівнянь пов'язаний з труднощами не тільки обчислювального характеру, але й принциповими. Таке твердження ґрунтується на наступному: умови на межі розподілу фаз є нелінійними, сформульована модель є багатомірною відносно просторових змінних, електрофізичні параметри матеріалів залежать від температури і є наближеними, алгоритми розв'язку таких задач вимагають обґрунтування та застосування значних обчислювальних ресурсів.

Тому слід розглянути спрощену модель процесу, реалізацію якої можна провести методами комп'ютерного моделювання. Для такої моделі слід довести її адекватність відомим моделям або порівняти отримані результати з експериментальними.

Побудуємо математичну модель теплообміну з урахуванням фазового переходу при мікрохвильовій зміцнюючій термообробці керамічних матеріалів.

Для визначення координат векторів електромагнітного поля, що ініціюють джерело тепла потужності  $Q$  в області термообробки, отримано рішення рівнянь Максвелла або еквівалентного їм рівняння Гельмгольца щодо електричного вектора Герца для відповідних граничних умов [6].

Мікрохвильове нагрівання викликає в оброблюваному матеріалі такий фізико-хімічний процес, протікання якого супроводжується переміщенням меж фаз, тому задача теплопровідності в системі тіл з рухливими границями фаз, для випадку, коли температура фазового переходу є функцією координат і часу, а переміщення границь є або не є наслідком фазових перетворень, включає наступні рівняння [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= a_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{a_1 Q}{\lambda_1}; \\ 0 < r < \xi(\tau); \\ T_1(0, r) &= T_{TM}; \\ \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} &= 0; \\ T_1(\tau, \xi(\tau)) &= T_{TM}; \\ -\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=\xi(\tau)} + \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=\xi(\tau)} &= \rho T_u \frac{d\xi}{d\tau}; \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= a_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right); \\ \xi(\tau) < r < R; \\ T_2(0, r) &= T_0; \\ T_2(\tau, \xi(\tau)) &= T_{TM}; \\ T_2(\tau, R) &= T_0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $T_1(\tau, r)$ ,  $T_2(\tau, r)$  – температура рідкої і твердої фаз;  $T_{TM}$  – температура плавлення;  $T_u$  – питома температура плавлення;  $\xi(\tau)$  – положення границі розплаву,  $c$  – теплоємність;  $\rho$  – щільність;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $Q$  – щільність теплових джерел – є відомими функціями координат, часу  $\tau$  або температури.

Введемо нову невідому функцію  $U(\tau, r) = rT_1(\tau, r)$  і перетворимо граничні умови до однорідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{ra_1 Q}{\lambda_1}; \\ 0 < r < \xi(\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

$$U(0, r) = rT_{TM}, \quad (3)$$

$$U(\tau, 0) = U(\tau, \xi) = 0. \quad (4)$$

Аналогічно для функції  $V(\tau, r) = rT_2(\tau, r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= a_2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}; \\ \xi(\tau) < r < R; \end{aligned} \quad (5)$$

$$V(0, r) = T_0 r - \varphi(0, r); \quad (6)$$

$$V(\tau, \xi) = V(\tau, R) = 0;$$

$$\varphi(\tau, r) = T_{TM} \xi + \frac{(T_0 R - T_0 \xi)(r - \xi)}{R - \xi}. \quad (7)$$

Рішення (2) - (7) відповідно до метода, наведеного у роботі [8], має такий вигляд:

$$U(\tau, r) = rT_{TM} + \frac{2}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi r}{\xi}, \quad (8)$$

$$V(\tau, r) = \varphi(\tau, r) + \frac{R}{R - \xi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{R - \xi} (r - \xi), \quad (9)$$

де коефіцієнти  $\alpha_n(\tau)$ ,  $\beta_n(\tau)$  визначаються відповідно з наступних задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь [9]:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_n}{d\tau} + \left( \frac{n\pi}{\xi} \right)^2 a_1 \alpha_n &= \\ = \frac{n}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \gamma_{nm} \alpha_m + \frac{(-1)^{n+1} \xi Q a_1}{n\pi \lambda_1}; \end{aligned}$$

$$\alpha_n(0) = 0;$$

$$\gamma_{nm} = \frac{2}{m^2 - n^2}, \quad m \neq n;$$

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2n^2}, \quad m = n;$$

$$\frac{d\beta_n}{d\tau} + \left( \frac{n\pi}{R - \xi} \right)^2 a_2 \beta_n = -\frac{n\xi}{R - \xi} \sum_{m=1}^{\infty} m \gamma_{nm} \beta_m +$$

$$+ \frac{(R - \xi) [1 - (-1)^n]}{n\pi} \left\{ T_{TM} \frac{\xi}{\xi} + \frac{(R - \xi)(2T_{TM} \xi - \xi T_0 R)}{n\pi} - \frac{\xi \xi (T_0 R - T_{TM} \xi)}{n\pi} \right\} + \frac{\xi \xi + (-1)^{n+1} R}{n\pi(R - \xi)} (T_0 - T_{TM}) R;$$

$$\beta_n(0) = \frac{\xi(0)(T_{TM} - T_0)(1 - R)}{n\pi}.$$

Розподіл температури в оброблюваному керамічному матеріалі визначається вираженнями:

$$T_1(\tau, r) = T_{TM} + \frac{2}{\xi r} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{\xi} r; \quad (10)$$

$$T_2(\tau, r) = \frac{\varphi(\tau, r)}{r} + \frac{2}{r(R - \xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{(R - \xi)} (r - \xi). \quad (11)$$

Положення рухливої границі, що розділяє розплавлену область з порошкоподібною, не розплавленою, встановлюється відповідно до умови, що температура на ній дорівнює температурі фазового перетворення і визначається з рівняння:

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{2\lambda_1 \pi}{L\rho \xi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \alpha_n(\tau) = \frac{\lambda_2}{L\rho \xi} \times \left[ \frac{(T_0 R - T_{TM} \xi)}{R - \xi} - T_{TM} + \frac{2\pi}{(R - \xi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n(\tau) \right]. \quad (12)$$

**Висновки.** Побудовано математичну модель плавлення керамічних матеріалів під дією енергії мікрохвильового електромагнітного поля з метою їхнього зміцнення. Отримано розподіли полів температур у твердій порошкоподібній фазі матеріалу й у рідкій фазі – розплав матеріалу, а також закон руху границі фазового перетворення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Явчуновский В.Я. Микроволновая и комбинированная сушка. Физические основы технологии и оборудования. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1992. – 233 с.
2. Рудаков В.И. Применение СВЧ технологий в энергоёмких производственных процессах // Труды «МКТТА-95». – Харьков, 1995. – С. 102.
3. Диденко А.Н., Зверев Б.В. СВЧ энергетика. – М.: Наука, 2000. – 376 с.
4. Рогов И.И. Термообработка керамических материалов и исходного сырья в высокочастотном электрическом поле // Электронная техника. – 1979. – Сер. 6, № 3. – С. 107 – 111.
5. Кожевников В.Ю. Спекание керамических материалов в сверхвысокочастотном электромагнитном поле с переизлучением // Электро- и тепло-технологические процессы и установки. – Саратов: СГТУ, 2003. – С. 11 – 16.
6. Яковенко В.О. Моделирование теплонапряженного stanu хвилеводу надвисокочастотного генератора // Науковий вісник Національного гірничого університету. – Дніпропетровськ: НГУ, 2007. – №8. – С. 75 – 77.
7. Яковенко В.О. Моделирование теплообміну в матеріалі під дією енергії надвисоких частот // VI Всеукр. наук.-техн. конф. «Фізичні процеси та поля технічних і біологічних об'єктів». – Кременчук: КДПУ, 2007. – С. 78.
8. Яковенко В.О. Моделирование теплових процесів при спалюванні вуглю під дією енергії надвисоких частот // Системні технології, системне моделювання технологічних процесів. – 2007. – №5 (52). – С. 65 – 71.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. – М., 1970. – 720 с.

Стаття надійшла 12.04.2008 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., проф.  
Родькіним Д.Й.