

УДК 681.8

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИМЕЖОВОЇ КРИВОЇ ЗОБРАЖЕННЯ ОБ'ЄКТА

*Білинський Й.Й., к.т.н., доц., Мельничук А.О., магістрант  
Вінницький національний технічний університет  
21021, м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 95  
E-mail: [bilynsky@svitonline.com](mailto:bilynsky@svitonline.com)*

В статті предложена математическая модель дискретной двумерной приведенной пограничной кривой края объекта на изображении, которая в зависимости от положения в плоскости матричного приемника может быть асимметричной или квазиасимметричной относительно краевой точки и дает возможность определить субпиксельную координату этой точки.

**Ключевые слова:** пограничная кривая, край, низкочастотная фильтрация, дискретная свертка, фальстр.

The mathematical model of discrete two-dimensional rationed boundary dark-and-light curve of object edge is offered in the given paper, which depending on position in plane of the matrix receiver can be asymmetric or kvaziasymmetric in relation to the edge point and which enables to define the sub-pixel coordinates of the selected point.

**Key words:** boundary dark-and-light curve, filter, edge, low-pass filtration, discrete faltung.

**Вступ.** У реальному оптико-електронному вимірювальному каналі формується зображення об'єкта або фізичного поля, краї якого та контури розмиті, що неминуче веде до неточного визначення його координат, внаслідок чого зростають систематичні похибки вимірювання геометричних розмірів об'єктів і фізичних полів.

Жоден із відомих детекторів краю не є досконалим, оскільки кожен із них може втрачати справжні краї, виявляти помилкові краї, вносити перекручування форми й положення країв.

Введення зображення в цифровий канал обробки супроводжується його дискретизацією. Згідно з теоремою відліків, відтворити без спотворення, а отже отримати координати краю об'єкта на зображенні з високою точністю, неможливо [1].

**Аналіз попередніх досліджень.** Оптико-електронні вимірювальні канали, призначені для вимірювання геометричних розмірів об'єктів, мають велику кількість оптичних передатних ланок, тому оптичну передатну функцію (ОПФ) оптичного тракту з високою точністю апроксимують функцією Гаусса. Оскільки у такої ОПФ відсутня фазова складова, тобто фазова оптична функція (ФПФ) дорівнює нулю, то амплітудна складова ОПФ може бути описана такою ж функцією Гаусса, що і ОПФ [2]:

$$H^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (1)$$

Передатні характеристики таких елементів, як ПЗЗ-матриць, досліджені у праці [3], показують, що ПЗЗ-матриця не є просторово інваріантною оптичною передатною ланкою, оскільки ФПФ матриці має періодичний характер і дорівнює нулю тільки в тих точках, де краї зображення співпадають з краями фотоелементів.

**Мета роботи.** Розробка математичної моделі дискретної двовимірної нормованої примежової кривої краю об'єкта на зображенні, яка в залежності від положення в площині матричного приймача може бути асиметричною або квазіасиметричною щодо крайової точки й яка дає можливість визначити

субпиксельні координати даної точки.

**Матеріал і результати дослідження.** При введенні інформації про зображення в обчислювальний пристрій, приймальна система переводить оптичне розподілення яскравості зображення в цифрову форму. Таким чином зображення дискретизується у відповідності з просторовою решіткою матричного фотоприймача.

Тоді вихідний сигнал буде представлений з застосуванням дискретної згортки у вигляді [4]:

$$H^*(n, m) = H^*(x, y) \cdot S_{\delta}(x, y),$$

де

$$S_{\delta}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - \Delta_x \cdot n + \Delta_{fx}) \times \\ \times \delta(y - \Delta_y \cdot m + \Delta_{fy}) \Delta_x \Delta_y,$$

а  $\Delta_x$  і  $\Delta_y$  – періоди решітки матричного фотоприймача за відповідними осями;  $\Delta_{fx}$  і  $\Delta_{fy}$  – випадкові фазові вибірки.

Функція  $S_{\delta}(x, y)$  називається функцією дискретизації або функцією вибірки.

Дискретна згортка має свої особливості, оскільки виконання повторного згортання з фільтром, що має іншу розмірність вікна приводить до зсуву положення крайової точки на примежових кривих фільтрованих зображень, що не спостерігається при виконанні неперервної згортки. Це означає, що для отримання шуканої точки, яка відповідає максимуму першої похідної, необхідно виконувати згортку тільки з фільтром, що має визначені вагові коефіцієнти, а також визначену розмірність вікна.

Для дискретного представлення примежової кривої модель (1) трансформується для одновимірного простору у вираз:

$$H^*(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{n=-k}^n \exp\left[-\frac{(n-0,5-\delta)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2)$$

де  $\sigma$  – середньоквадратичний розподіл перепаду яскравості відбитого світла на межі (постійна закону Гаусса) або ступінь розмитості;  $\delta$  – зміщення примежової кривої від середини пікселя по осі  $n$ , що ві-

дповідає краю об'єкта вимірювання;  $k$  – деяка кінцева область в просторі аргументів примежової кривої.

Для двовимірною випадку примежова крива буде описуватися виразом:

$$H^*(n, m) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{m=k}^m \sum_{n=-k}^n \exp \left[ -\frac{(n-0,5-\delta)^2}{2\sigma^2} + \frac{(m-0,5-\gamma)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3)$$

де  $\gamma$  – зміщення примежової кривої від середини піксела по осі  $m$ , що відповідає краю об'єкта вимірювання.

На рис. 1 наведено дискретне представлення декількох положень примежової кривої, отриманих за допомогою (2), край яких знаходиться в міжпіксельному просторі.

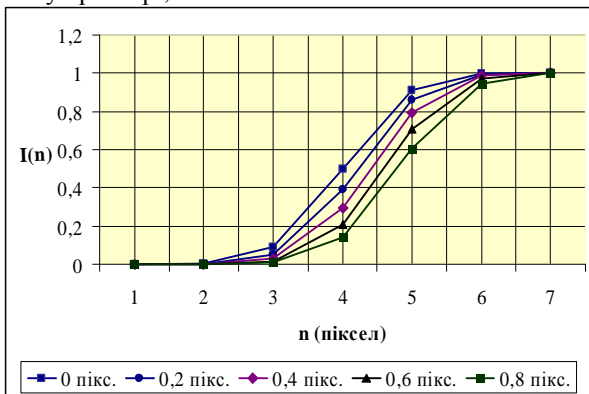


Рисунок 1 – Положення примежової кривої для декількох значень  $\delta$

З графічного представлення випливає, що будь-який край об'єкта вимірювання описується примежовою кривою, яка буде асиметричною тільки в тому випадку, коли край знаходиться на середині елементарного фотоприймача, тобто піксела, або посередині міжпіксельного простору.

При  $\delta=0$  примежова крива є асиметричною відносно крайової точки. Якщо ж центр примежової кривої знаходиться в міжпіксельному просторі, тобто  $0 < \delta < 1$ , то сама примежова крива стає квазіасиметричною, а параметр  $\sigma$ , який є постійним для даної примежової кривої, в результаті дискретного представлення змінюється в деякому діапазоні.

Максимальне значення градієнта нормованої примежової кривої визначається як [4]:

$$\left( \frac{dI}{dx} \right)_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad (4)$$

а для кривої, отриманої матричним фотоприймачем (при мінімальному значенні кроку  $dx=1$ ), вираз (3) значення градієнта буде мати вид:

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} \cdot \frac{I}{(I_{\max} - I_{\min})} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad (5)$$

де  $I_{\max}$  – максимальне значення яскравості примежової кривої;  $I_{\min}$  – мінімальне значення яскравості примежової кривої;  $\Delta I$  – максимальна зміна яскравості на примежовій кривій між двома сусідніми пікселами фотоприймального пристрою, що відповідає максимальному значенню градієнта.

При цьому відстань між пікселами є величиною постійною й дорівнює  $\Delta x=1$ . Тоді нормована функція розсіювання по осі  $x$  згідно з (3) та з урахуванням (5) визначається як:

$$G(x) = \exp \left( -\frac{\pi x^2 \Delta I^2}{(I_{\max} - I_{\min})^2} \right). \quad (6)$$

Формула (6) дозволяє розрахувати, відповідно, функцію розсіювання для будь-якої примежової кривої, а сама примежова крива згідно з (5) визначається [6]:

$$H^{**}(x) = \frac{\Delta I}{(I_{\max} - I_{\min})} \int_{-\infty}^x \exp \left( -\frac{\pi t^2 \Delta I^2}{(I_{\max} - I_{\min})^2} \right) dt = \operatorname{erf} \left( \frac{x \Delta I \sqrt{\pi}}{(I_{\max} - I_{\min})} \right). \quad (7)$$

У випадку дискретного представлення зображення функція розсіювання Гауса буде визначатися тільки у дискретних вузлах, що відповідають центрам елементарних фотоприймачів – пікселів. В результаті переходу до дискретних параметрів матричного фотоприймача, коли крок дискретизації вибраний однаковий по осях, зображення задається в двовимірній решітці з параметрами  $n, m$ :

$$f(n\Delta, m\Delta) = f(x, y) \Big|_{x=n\Delta, y=m\Delta}.$$

Для одновимірною простору з урахуванням (7) функція примежової кривої набуде вигляду:

$$H^{**}(n) = \frac{\Delta I}{(I_{\max} - I_{\min})} \sum_{n=-k}^n \exp \left( -\frac{\pi(n-0,5-\delta)^2 \Delta I^2}{(I_{\max} - I_{\min})^2} \right). \quad (8)$$

На рис. 2 наведена поверхня, що характеризує примежову криву в міжпіксельному просторі.

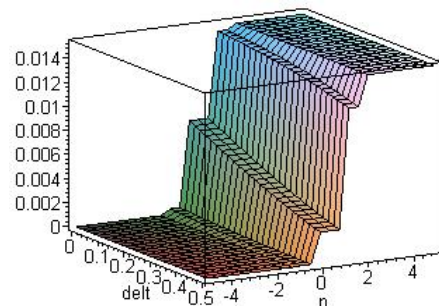


Рисунок 2 – Поверхня, що характеризує положення примежової кривої в міжпіксельному просторі  $\delta$

Збільшення величини  $\delta$  приводить до зсуву крайової точки в міжпіксельному просторі. Максимальне значення перепаду яскравості, тобто максимум першої похідної при цьому змінюється.

Таким чином примежова крива краю об'єкта на зображенні може мати не тільки асиметричну, але й квазіасиметричну форму відносно крайової точки, якщо положення краю знаходиться в міжпіксельному просторі та його зсув  $\delta$  не дорівнює 0 або 0,5. Оскільки ступінь розмитості  $\sigma$  не є критичним та безпосередньо пов'язаний з максимумом першої похідної, то усі викладки, що стосуються визначення краю залишаються незмінними і координата краю об'єкта на зображенні знаходиться в околі піксела, що від-

повідляє максимальному значенню першої похідної. При цьому задача зводиться до знаходження приведенного значення цієї похідної, а отже й приведенного значення  $\sigma$ , яке б задовольняло будь-яким положенням прилежної кривої.

На рис. 3 наведена квазіасиметрична прилежна крива, а також функція першої похідної, що визначає номер пікселя, в околі якого знаходиться край.

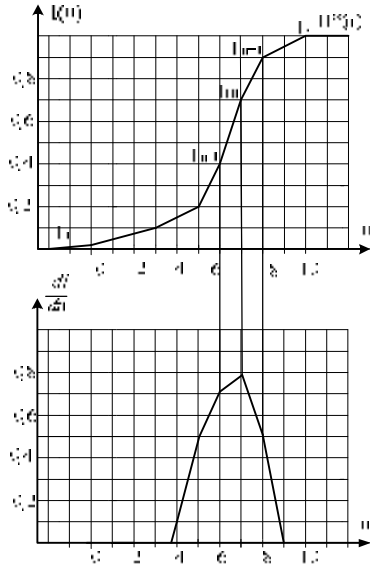


Рисунок 3 – Визначення квазіасиметричної прилежної кривої

Функція похідної розподілення яскравості прилежної кривої має різні нахили в околі максимуму, що свідчить про різний характер зміни яскравості. У зв'язку з цим запропонована методика знаходження приведенного значення похідної, яка основана на використанні двох частин даної кривої: нижньої, що відповідає перепаду яскравості від нижнього рівня прилежної кривої до пікселя з максимальним значенням похідної; верхньої, що відповідає яскравості від максимального значення похідної до верхнього рівня [7].

Похідні нижньої та верхньої частини кривої можна визначити згідно формул:

$$\frac{dI_n}{dn} = \frac{I_m - I}{I_m - 2I_n + I};$$

$$\frac{dI_b}{dn} = \frac{I_m - I}{2I_b - I_m - I}, \quad (9)$$

де  $I_m$  – яскравість пікселя на прилежній кривій, що відповідає максимуму першої похідної;  $I_n$ ,  $I_b$  – яскравість нижнього та верхнього значення яскравості прилежної кривої відповідно;  $I$  – яскравість пікселя вибирається з умови:

$$\begin{cases} \frac{dI_{m+1}}{dn} > \frac{dI_{m-1}}{dn} & \text{то } I = I_{m-1}; \\ \frac{dI_{m+1}}{dn} < \frac{dI_{m-1}}{dn} & \text{то } I = I_{m+1}, \end{cases} \quad (10)$$

де  $\frac{dI_{m-1}}{dn}$ ,  $\frac{dI_{m+1}}{dn}$  – значення першої похідної зліва та справа від максимуму відповідно;  $I_{m-1}$ ,  $I_{m+1}$  – яскравість пікселів зліва та справа від пікселя, що відповідає максимальному значенню похідної.

Приведене значення максимуму похідної на підставі розв'язку (10) з урахуванням умови (5) визначається як:

$$\frac{dI_{np}}{dn} = \frac{1}{2} \left( \frac{dI_n}{dn} + \frac{dI_b}{dn} \right) = \frac{|I_m - I|(I_b - I_n)}{(I_m - 2I_n + I)(2I_b - I_m - I)}. \quad (11)$$

На рис. 4 наведені залежності максимуму похідних прилежної кривої для будь-яких положень краю в міжпіксельному просторі, а також залежності похідних нижньої та верхньої частини прилежної кривої та приведенної похідної.

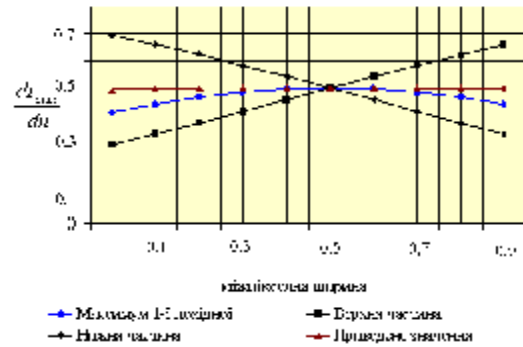


Рисунок 4 – Максимум похідних прилежної кривої

З графіку видно, що приведена похідна постійна для будь-яких положень краю в міжпіксельному просторі.

В такому випадку ступінь розмитості прилежної кривої згідно (5), з урахуванням (11) визначається:

$$\sigma = \frac{(I_m - 2I_n + I)(2I_b - I_m - I)}{|I_m - I|\sqrt{2\pi}}. \quad (12)$$

Використовуючи формулу (6), отримаємо функцію розсіювання для даної прилежної кривої:

$$G^*(x) = \exp\left( \frac{(I_m - I)^2 x^2 \pi}{(I_m - 2I_n + I)^2 (2I_b - I_m - I)^2} \right). \quad (13)$$

Аналогічно (7) прилежна крива, що відповідає функції розсіювання, визначається:

$$H^{**}(x) = \exp\left( \frac{|I_m - I|}{(I - 2I_n + I_m)(2I_b - I_m - I)} \right) - \int_{-\infty}^x \exp\left( \frac{(I_m - I)^2 x^2 \pi}{(I_m - 2I_n + I)^2 (2I_b - I_m - I)^2} \right) dx =$$

$$= \operatorname{erf}\left( \frac{x(I_m - I)\sqrt{2}}{(I - 2I_n + I_m)(2I_b - I_m - I)} \right), \quad (14)$$

а дискретне представлення такої прилежної кривої буде описано виразом:

$$H^{**}(n) = \frac{|I_m - I|}{(I - 2I_n + I_m)(2I_b - I_m - I)};$$

$$\sum_{n=k}^n \exp\left( -\frac{(n - 0,5 - \delta)^2 \pi (I_m - I)^2}{(I - 2I_n + I_m)^2 (2I_b - I_m - I)^2} \right). \quad (15)$$

На рис. 5 наведена поверхня, що характеризує положення крайової точки прилежної кривої в мі-

жпiкселному просторi в залежностi вiд величини максимального перепаду яскравостi, що вiдповiдає значенню першої похiдної.

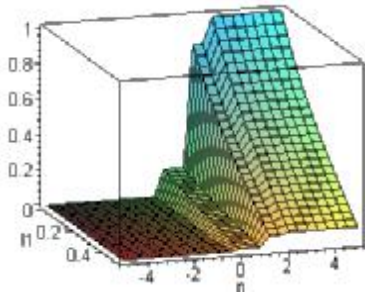


Рисунок 5 – Поверхня, що характеризує положення примежової кривої в залежностi вiд величини максимуму першої похiдної

В результатi зростання перепаду яскравостi величина максимального значення першої похiдної зростає. При цьому, змiнюється й кут нахилу примежової кривої.

Модель дискретної примежової кривої яскравостi для двовимiрного випадку набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 H^{**}(n) = & \frac{(I_m - I(n))}{(I(n) - 2I_n + I_m)(2I_b - I(n)_m - I(n))} \times \\
 & \times \frac{(I_m - I(m))}{(I(m) - 2I_n + I_m)(2I_b - I(m)_m - I(m))} \times \\
 & \times \sum_{n=-k}^n \exp\left(-\frac{(n - 0,5 - \delta)^2 \pi (I_m - I(n))^2}{(I(n) - 2I_n + I_m)^2 (2I_b - I_m - I(n))^2}\right) \times \\
 & \times \sum_{m=-k}^m \exp\left(-\frac{(m - 0,5 - \delta)^2 \pi (I_m - I(m))^2}{(I(m) - 2I_n + I_m)^2 (2I_b - I_m - I(m))^2}\right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

де  $I(n)$ ,  $I(n)_m$  i  $I(m)$ ,  $I(m)_m$  – яскравiсть пiкселiв, що вiдповiдають максимальному значенню похiдної по осi  $n$  i  $m$  вiдповiдно.

На рис. 6 наведена поверхня, що характеризує двовимiрну дискретну примежову криву краю об'єкта в координатах  $n, m$ .

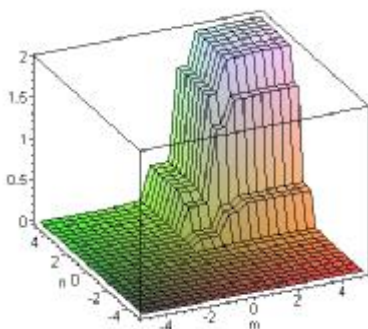


Рисунок 6 – Поверхня, що характеризує двовимiрну примежову криву

Двовимiрна примежова крива має рiзнi значення нахилу, оскiльки величини максимального перепаду яскравостi, що вiдповiдають максимуму першої похiдної для координат  $n, m$ , мають рiзнi значення.

Таким чином, для отримання функцiї квазiасиметричної примежової кривої, необхідно визначити параметри примежової кривої, тобто її величину пе-

репаду, а також максимальнi значення похiдної по вiдповiдним осям.

**Висновки.** Синтезовано узагальнену математичну модель перепаду яскравостi для будь-яких положень примежової кривої в мiжпiкселному просторi. Дана модель забезпечує iснування єдиного рiшення, оскiльки були введенi умови, що дозволяють деталiзувати характер розмитостi примежової кривої та її положення. Створена модель є узагальненою, тому що її можна застосовувати пiд час аналізу визначення краю об'єкта вимiрювання, визначення пiку свiтлової плями та пiку свiтлової лiнii в поперечному перерiзi.

Проведенi результати моделювання дозволяють дiяти висновку, що процес перерозподiлу яскравостi в результатi виконання низькочастотної фiльтрацiї за допомогою гауссового фiльтра з визначеними ваговими коефiцiєнтами та розмiрностю вiкна дає змогу теоретично обгрунтувати новий метод вимiрювання крайової точки та розвинути вiдомi теоретичнi пiдходи субпiкселного визначення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шмидт Д., Шварц В. Оптоэлектронные сенсорные системы. – М.: Мир, 1991. – 96 с.
2. Муравський Л.І. Вплив розмиття рiзкого краю на похибку дискретизацiї зображень в оптико-цифровiй системi // Комп'ютернi технологiї друкарства. – 2000. – №4. – С. 373–377.
3. Форсайт, Девид А., Понс, Жан. Комп'ютерное зрение. Современный подход.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 928 с.
4. Кононов В.И. и др. Оптические системы построения изображений. – К.: Техніка, 1981. – 133 с.
5. Порфирьев Л.Ф. Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах. – Л.: Машиностроение, 1989. – 387 с.
6. Соифер В.А. Методы компьютерной обработки изображений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
7. Бiлинський Й.Й. Математична модель локалiзацiї краю зображення об'єкта // Інформацiйнi технологiї та комп'ютерна iнженерiя. – 2007. – №3(10). – С. 73-79.

Стаття надiйшла 20.04.2008 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., проф.  
Родькiним Д.Й.