УДК 530.1:517.9

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Бранспиз Ю.А., д.т.н., проф., Каштанов О.Ю. магистр
Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
91034 г. Луганск, кв. Молодежный, 20а
E-mail: branspiz@mail.ru

Розглядається задача щодо аналітичного зв'язку потенціалів плоскопаралельного і плоскомерідіанного полів в одновимірному випадку. Потенціали задовольняють рівнянню Пуасона. Одержане загальне рівняння, що зв'язує між собою ці потенціали для будь-якої функції в правій частині одновимірних рівнянь поля, яка інтегрується.

Ключевые слова: потенціал, плоскопаралельне поле, плоскомерідіанне поле, одновимірність.

In the article the problem about analytical connection between potentials of planar and axial symmetry fields in 1-dimensional case is considered. The potentials satisfy the Poisson equation. It is received general equation, linking between itself these potentials for any integrable function in right part of 1-dimensional field equations.

Key words: potential, planar field, axial field, 1-dimensional.

Введение. Расчеты различного вида полей имеют широкое распространение как в теоретических исследованиях, так и в практических приложениях (например, расчеты электрических или магнитных полей в соответстсвующих электротехнических устройствах). Эти расчеты основаны, как правило, на непосредственном решении уравнений поля, в частности, уравнений Лапласа и Пуассона.

При этом расчетчики стараются максимальным образом использовать симметрии тех систем, для которых осуществляется расчет поля. Одним из видов такой симметрии является осевая симметрия, которой соответствует так называемое плоскопараллельное поле.

Следует отметить, что в настоящее время имеется достаточно разработанная база для численного решения задач расчета различных полей, в том числе, электромагнитных полей плоскомеридианного типа (так называемые задачи анализа конкретных электромагнитных систем). Однако интерес исследователей привлекают и возможности аналитического расчета полей, имеющие, как представляется, большую когнитивную ценность, по сравнению с численными методами (и результатами) расчета полей.

В этой связи методологически оправданным и актуальным является подход, согласно которому аналитическое решение полей с осевой симметрией (плоскомеридианных полей) определяется на основе аналитического решения плоскопараллельных полей (заметим, оба вида полей являются двумерными, что и дает возможность указанного поиска). В общем случае задача определения аналитической связи между решениями уравнений поля в плоскопараллельном и плоскомеридианном случае может быть сформулирована как задача связи между соответствующими потенциалами поля (ведь уравнения поля записываются относительно его потенциалов).

В частности, для полей, которые не зависят от времени, обозначим потенциал плоскопараллельного поля – j_P, а потенциал плоскомеридианного поля – j_0. Тогда указанная задача определения аналитической связи между решениями уравнений поля в плоскопараллельном и плоскомеридианном случаях может быть сформулирована как задача аналитической связи потенциалов j_P и j_0 в заданной области (расчетная область с определенными граничными условиями, обусловленными конфигурацией источников поля), являющихся решениями уравнений вида:

$$\frac{\partial^2 j_P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 j_P}{\partial y^2}=F(x,y)\ , \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 j_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial j_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 j_0}{\partial y^2}=F(x,y)\ , \qquad (2)$$

где уравнение (1) – уравнение Пуассона для потенциала j_P, а уравнение (2) – уравнение Пуассона для потенциала j_0, при записи которого учтена двухмерность плоскомеридианного поля, позволяющая обозначить его радиальную координату его как x, а вторую метрическую координату - как y; $F(x,y)$ – некоторая заданная функция в декартовых координатах (x,y).

Заметим, что для случая $F(x,y)=0$ уравнения (1) и (2) переходят в уравнения Лапласа, а задача связи потенциалов j_P и j_0 становиться задачей об аналитической связи потенциалов безвихревого поля в плоскопараллельном и плоскомередианном случае. При этом, собственно, проблемная ситуация связана с определением тех общих подходов, на которых может быть найдено решение задачи об аналитической связи потенциалов j_P и j_0.

Анализ предыдущих исследований. В настоящее время для решения уравнений поля в плоскопараллельном случае имеется достаточно обширная теоретическая база, позволяющая осуществлять аналитические расчеты таких полей практически любой сложности. Что же касается уравнений поля в плоскомеридианном случае, то для них аналитическое решение в общем случае встречает определенные трудности.

При этом можно констатировать, что в настоящее время задача связи между потенциалами плоскопараллельного поля и поля с осевой симметрией в общем случае не решена (по крайней мере, авторам данной работы такое решение в доступных нам публикациях не встречалось). Имеются лишь отдельные исследования по свойствам такой связи (см., например, [1, 2]), наиболее полная сводка которых приведена в [3].

Поэтому общее исследование рассматриваемой задачи остается нерешенной проблемой.

В этой связи следует указать на тот подход к решению проблемы общего решения задачи о связи потенциалов j_P и j_0, который был применен авторами данной работы в публикациях [4,5]. Этот подход основан на предварительном исследовании искомой аналитической связи в одномерном случае для уравнений вида

$$\frac{d^2 j_P}{dx^2} = F(x) \ , \qquad (3)$$

$$\frac{d^2 j_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dj_0}{dx} = F(x) \ , \qquad (4)$$

получаемых из общих уравнений (1) и (2) при условии одномерного распределения потенциалов (эта одномерность позволяет перейти в рассматриваемых уравнениях от частных производных к полным дифференциалам)

$$\frac{\partial^2 j_P}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 j_0}{\partial y^2} = 0 \ .$$

При этом авторы исходили из того, что решение задачи об аналитической связи потенциалов j_P и j_0 в одномерном случае обладает какими-то свойствами общего решения.

Но в [4] связь потенциалов j_P и j_0 найдена лишь для случая $F(x) = const$. В [5] же получено слишком громоздкое выражение, включающее в себя несколько интегралов, что обусловливает определенные трудности при непосредственном использовании этого выражения.

Цель работы. Основываясь на идее о соответствии общего решения задачи о связи потенциалов j_P и j_0 в одномерном и двухмерном случаях, получить более простое уравнение связи между потенциалами j_P и j_0 в одномерном случае, описываемом уравнениями (3) и (4), когда $F(x)$ – интегрируемая функция.

Материал и результаты исследований. Требуется найти аналитическую связь между потенциалами j_P и j_0, которые удовлетворяют уравнениям (3) и (4) соответственно.

Для этого преобразуем уравнение (4) к виду (умножением его правой и левой части на x)

$$x\frac{d^2 j_0}{dx^2} + \frac{dj_0}{dx} = x \cdot F(x),$$

что позволяет преобразовать левую часть как

$$x\frac{d^2 j_0}{dx^2} + \frac{dj_0}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\frac{\partial j_0}{\partial x} \right).$$

В результате уравнение (4) преобразуется к уравнению вида

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{\partial j_0}{\partial x} \right) = x \cdot F(x) \ . \qquad (5)$$

В связи с преобразованием (4) к (5) заметим, что оно исключает из рассмотрения точку $x = 0$. Но такое исключение в случае плоскомеридианных полей является традиционным [6].

Форма записи уравнения (5) позволяет относительно легко получить его решение последовательным интегрированием, что дает следующую цепочку очевидных равенств:

$$x\frac{\partial j_0}{\partial x} = \int x \cdot F(x) dx + k_1 \ ,$$

$$j_0 = \int \left(\frac{\int x \cdot F(x) dx}{x} \right) dx + k_1 \ln x + k_0 \ , \qquad (6)$$

где k_1 и k_0 – некоторые константы интегрирования, определяемые по граничным условиям для потенциала j_0.

Чтобы теперь найти аналитическую связь между потенциалами j_0 и j_P, выразим правую часть выражения (6), являющегося общим решением уравнения (5), через j_P. Для этого подставим в (6) вместо функции $F(x)$ ее представление через потенциал j_P из уравнения (3), а именно, сделаем в (6) подстановку

$$F(x) = \frac{d^2 j_P}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dj_P}{dx} \right),$$

что позволяет записать для потенциала j_0 следующее выражение:

$$j_0 = \int \left(\int x \cdot d\left(\frac{dj_P}{dx} \right) \right) \frac{dx}{x} + k_1 \ln x + k_0 \ . \qquad (7)$$

Интегрируя в первом слагаемом в выражении (7) под знаком интеграла по частям, это выражение, после несложных преобразований, можно привести к виду

$$j_0 = \int \left(x\frac{dj_P}{dx} - \int dj_P \right) \frac{dx}{x} + k_1 \ln x + k_0 \ ,$$

или

$$j_0 = \int dj_P - \int \left(\int dj_P \right) \frac{dx}{x} + k_1 \ln x + k_0 ,$$

или

$$j_0 = j_P - \int \frac{j_P}{x} dx + k_1 \ln x + k , \qquad (8)$$

где k – константа интегрирования, равная сумме константы интегрирования k_0 и константы интегрирования в интеграле $\int dj_P$.

Выражение (8), собственно, и может считаться искомой аналитической связью между потенциалами j_P и j_0. Следует отметить при этом, что это выражение много проще того, которое получено авторами ранее и приведено в [5].

Выражение (8) может быть записано и иначе, если учесть, что сумма $k_1 \ln x + k_0$ представляет собой, по существу, решение уравнения (4) в случае $F(x) = 0$. Тогда, обозначив это решение как $j_{00} = k_1 \ln x + k_0$, выражение (8) можно переписать в виде

$$j_0 = j_{00} + j_P - \int \frac{j_P}{x} dx + k_2 , \qquad (9)$$

где k_2 – константа интегрирования в интеграле $\int dj_P$.

Таким образом, выражения (8) и (9) представляют собой аналитическую связь одномерных потенциалов j_P и j_0, являющихся решениями уравнений (3) и (4) в общем случае произвольной интегрируемой функции $F(x)$. При этом, как это следует из самого вида полученных выражений (8) и (9), практические вычисления по ним возможны при условии интегрируемости потенциала j_P . Это, в свою очередь, возможно если интегрируемой будет и функция $F(x)$, что несложно увидеть из записи решения уравнения (3) в виде (здесь c_0 и c_1 – соответствующие константы интегрирования)

$$j_P = c_0 + c_1 x + \int \left(\int F(x) dx \right) dx , \qquad (10)$$

который несложно получить прямым последовательным интегрированием в (3) по переменной x.

Пример 1. Пусть $F(x) = A$, где $A = const$. Тогда из (10) для потенциала j_P в этом случае мож-но записать:

$$j_P = c_0 + c_1 x + \frac{1}{2} A x^2 ,$$

что после подстановки в (8) дает для потенциала j_0 следующее выражение:

$$j_0 = c_0 + k_0 + (k_1 - c_0) \ln x + \frac{1}{4} A x^2 ,$$

которое (с точностью до обозначения констант) совпадает с решением уравнения (4), которое можно получить из (6) подстановкой $F(x) = A$.

Пример 2. Пусть $F(x) = x$. Тогда из (10) для потенциала j_P в этом случае можно записать:

$$j_P = c_0 + c_1 x + \frac{1}{6} x^3 ,$$

что после подстановки в (8) дает для потенциала j_0 следующее выражение:

$$j_0 = c_0 + k_0 + (k_1 - c_0) \ln x + \frac{1}{9} x^3 ,$$

которое (с точностью до обозначения констант) совпадает с решением уравнения (4) в рассматриваемом случае, которое можно получить из (6) подстановкой $F(x) = x$.

Выводы. Между одномерными плоскопараллельным и плоскомеридианным потенциалами имеется аналитическая связь, согласно которой их разность равна разности одномерного плоскомеридианного потенциала, удовлетворяющего одномерному уравнению плоскомеридианного поля с нулевой правой частью, и интеграла от отношения одномерного плоскомеридианного потенциала на переменную координату одномерного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сочнев А.Я. О классе плоскомеридианных полей, идентичных по геометрической структуре плоскопараллельным полям // Электричество.– 1966. – №10.– С. 48-52.

2. Острейко В.Н. О связи плоскомеридианных и плоскопараллельных полей эквипотенциальных электродов // Изв. вузов. Электромеханика.– 1972. – № 9.– С. 942-948.

3. Загирняк М.В. Исследование, расчет и усовершенствование шкивных магнитных сепараторов. – К.: ІЗМН, 1996. – 488 с.

4. Бранспиз Ю.А., Каштанов А.Ю. О связи потенциалов статических полей для плоскопараллельных и осесимметричных систем полюсов (одномерный случай) // Технічна електродинаміка .– 2008. – Тем. випуск: Проблеми сучасної електротехніки. Ч. 6. – С. 12-15.

5. Бранспиз Ю.А., Каштанов А.Ю. К вопросу связи решений уравнения Пуассона в одномерном случае для плоскопараллельного и плоскомеридианного полей // Вісник СНУ ім. В. Даля.– 2008.– № 8. Ч.1.

6. Князь А.И. Метод расчета плоскомеридианных полей с "закрытой" осью // Электри-чество .– 1974.- № 3.– С. 74-77.

Стаття надійшла 30.09.2008 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. Єлізаровим О.І.