УДК 378.02:53:519.25

ЕКСПОНЕНТА ТА СУТНІСТЬ ОПИСАНИХ НЕЮ ФІЗИЧНИХ ЯВИЩ

Єлізаров О.І., д.ф-м.н., проф., Сукачов О.В., к.ф.-м.н., доц., Закатнов М.В., ас.
Кременчуцький державний політехнічний університет ім. Михайла Остроградського
39614 Кременчук, вул. Першотравнева, 20
E-mail: fizika@polytech.poltava.ua

Представлены различные сведения о числе *e* - основании натуральных логарифмов, знаменитой математической константе, которая появляется в самых "неожиданных местах". Описана лекционная демонстрация построения экспоненциальной функции с отрицательным показателем с целью углубления понимания многих явлений в природе и единства их механизмов. Материал статьи имеет познавательный характер.

Ключевые слова: экспонента, натуральный логарифм, функция.

In the article different information is presented about the number of *e* - basis of natural logarithms, famous mathematical constant which appears in the most unexpected "places". Lecture demonstration of construction of exponential function with a negative index is described with the purpose of deepening of understanding many phenomena of nature and unity of their mechanisms. Materials of the article have educational character.

Keywords: exponent, natural logarithm, function.

Вступ. Серед безмежного розмаїття чисел число *e* має особливий "статус". І з одного боку, з даним числом знайомі вже школярі, а з іншого - навіть найменша спроба розібратись з його властивостями або навіть із самим поняттям числа *e* неодмінно виводить за межі шкільного курсу математики та фізики.

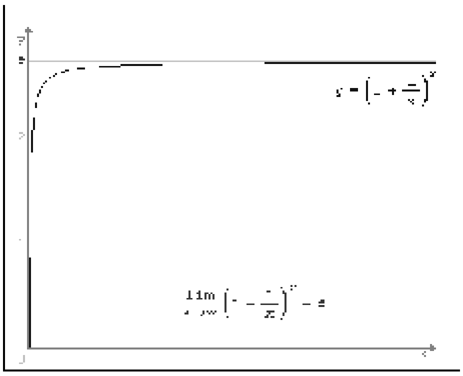
Мета роботи. Систематизація матеріалів щодо властивостей числа *e* та розробка на їх основі лекційної демонстрації побудови експоненти з від'ємним показником.

Аналіз попередніх досліджень. Математичний зміст числа *e*. Математичну константу *e* називають числом Ейлера, або неперовим числом відповідно до історії народження константи (на початку 17-го століття були винайдені логарифми, винахідником логарифмів був шотландець Джон Непер) [1-3]. Чому була обрана літера *e*, точно невідомо, можливо тому, що з неї починається слово *exponential* (показниковий, експоненціальний) [4]. Згідно з іншим припущенням, літери ***a***, ***b***, ***c*** і ***d*** вже досить широко використовувалися в інших цілях, а ***e*** була першою "вільною" літерою [5].

Величина *e* = 2,72... прийнята за основу натуральних логарифмів. Це ірраціональне число, тобто не здатне бути точно вираженим дробом *a/b* із цілими числами ***a*** і ***b***. Якщо ж спробувати записати його десятковим дробом, він виявиться нескінченним і неперіодичним. Число Ейлера легко запам'ятати до п'ятнадцятого знака після коми, якщо знати дату народження великого російського письменника Льва Толстого (1828) та кути рівнобедреного прямокутного трикутника (45, 90 и 45 градусів): *e* = 2,7 <u>1828</u> <u>1828</u> <u>45</u> <u>90</u> <u>45</u>...

Число *e* трансцендентне, тобто не задовольняє жодному алгебраїчному рівнянню з цілими коефіцієнтами. Це перше число, яке не було виведене як трансцендентне, а його трансцендентність була доведена тільки у 1873 році Шарлем Ермітом [6].

Цікаво, що першим цю константу приблизно одержав швейцарський математик Якоб Бернуллі [4], намагаючись обчислити значення границі, до якої прагне зазначений на рис.1, а) вираз при необмеженому зростанні числа ***x***. Крива спочатку швидко зростає, потім зростання поступово сповільнюється, наближаючись у нескінченності до горизонтальної лінії з координатою ***y*** = ***e***.



а)

б)

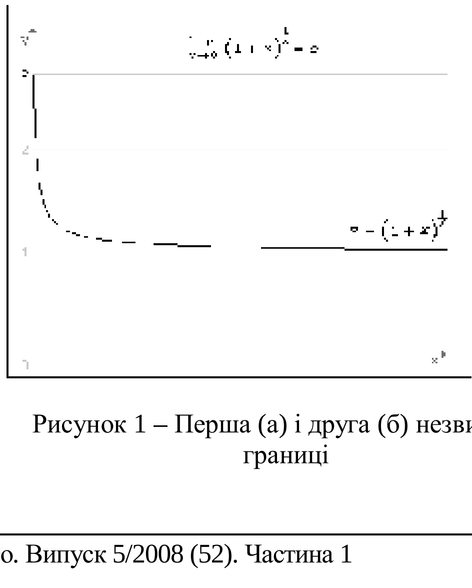


Рисунок 1 – Перша (а) і друга (б) незвичайні границі

Неперове число також визначається й наступною границею, до якої прагне зазначений на рис.1 б) вираз при необмеженому убуванні числа x до нуля. Тут навпаки: чим ближче x до нуля, тим ближче вираз до константи e.

Вимірюється неперове число й рядом Тейлора: сумою нескінченного ряду зворотних факторіалів чисел, тобто $e=\Sigma(1/x!)$ при $x = 0..\infty$.

Експонента e^x, помножена на дійсне число, є єдиним розв'язком диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = y(x)$ із граничною умовою $y(0) = 1$. Крім того, через експоненту виражаються загальні розв'язки однорідних диференціальних рівнянь. Експонента визначена на всій дійсній числовій вісі. Вона всюди зростає й строго більша нуля. Зворотна функція до неї - натуральний логарифм ln x. Похідна в нулі дорівнює 1, тому дотична до експоненти в цій точці проходить під кутом 45°. Основна ж функціональна властивість експоненти, як і кожної показникової функції:

$$exp(x + y) = exp(x)exp(y). \quad (3)$$

Примітною особливістю даної функції виявилася її незмінність при диференціюванні, тобто її похідною є сама ж експонента: $(e^x)' = e^x$. Отже, швидкість зміни експоненти (функція $y=e^x$) має такий же графік, як і графік експоненти (рис. 2).

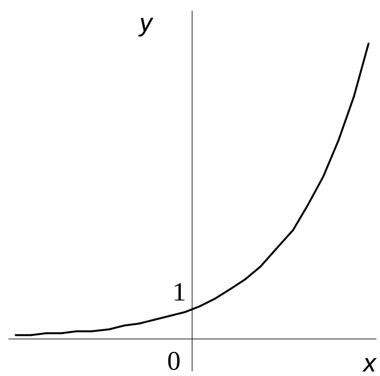


Рисунок 2 – Експонента $y=e^x$. Форма цієї кривої відбиває важливі математичні особливості, характерні для широкого кола фізичних явищ.

Швидкість зміни швидкості зміни експоненти має тотожній графік. Побудувавши графік кута нахилу дотичної до неї, зрозуміємо, що він збігається з графіком самої експонентної функції. Експонента - це така функція, значення якої в будь-якій точці збігається з кутом нахилу, дотичній до неї в цій точці (або принаймні пропорційне йому).

До речі, інтеграл від цієї функції $y = e^x$ також дорівнює самій функції.

Перша властивість вимагає безперервної пропорційності швидкості росту величини самої величині. На прикладі сніжної грудки, пущеної з гори, ця залежність виглядає так: якщо грудка збільшилася, скажімо, в 5 разів, то й швидкість налипання снігу на неї теж повинна збільшитися в 5 разів. Друга властивість вимагає безперервної рівності кожного значення функції сумі всіх її попередніх значень, тобто її інтегральному значенню. Саме тому експонентна функція відіграє настільки важливу роль при описі простих форм росту, наприклад, необмеженого розмноження популяції біологічного виду, швидкість росту якої пропорційна чисельності самої популяції. У деяких районах Земної кулі ця залежність приблизно справедлива й до зросту народонаселення. Багато показників нашої цивілізації наростають у часі майже за цим законом: споживана енергія, кількість наукових публікацій; так було з ростом числа коней на планеті, з ростом вітрильних суден, із ростом числа жителів міст і автомобілів у них, зношування й руйнування матеріалів, розмноження мікробів, процесів нагромадження капіталів і т.і. - безліч явищ у живій та неживій природі й діяльності людини.

Експонентні залежності широко поширені в різних областях природознавства і виявляються застосовними для опису в часі всіляких величин, що фігурують у соціології, економіці, медицині, психології. Наприклад, закон Вебера-Фехнера щодо залежності сили відчуття S від ступеня роздратування B: $S=k\cdot\ln B$ [5]. Цьому закону підкоряються зір, слух, нюх, дотик, смак, емоції, пам'ять (доки фізіологічні процеси не переходять стрибком у патологічні, коли рецептори піддалися видозміні або руйнуванню).

Якщо тримати гнучкий ланцюг за обидва кінці, то він провисне по кривій, яка так і називається – ланцюгова лінія (рис. 3). До рівняння цієї кривої теж входить число e.

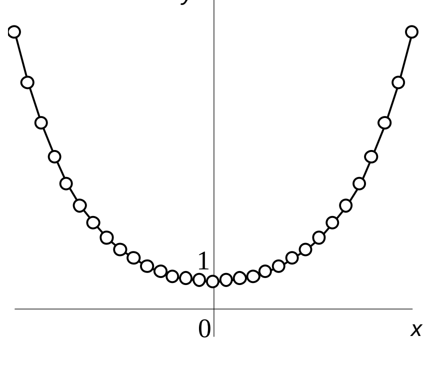


Рисунок 3 – Ланцюгова лінія $y = \text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Тим самим рівнянням, наприклад, описують переріз паруса, надутого вітром.

Французький ентомолог Жан Анрі Фарб у книжці "Життя павука" дає неперевершений за красою мови опис ланцюгової лінії: "Безглузде число *e* знову постає перед нами, виведене на цей раз у павутині. "Вийшовши з дому туманним ранком, розглянемо уважно сплетену за ніч павутину. Всіяні крихітними крапельками, її липучі нитки провисають під цим тягарем, утворюючи ланцюгові лінії, і тенета стають схожими на велику кількість разків намиста, що немовби повторюють обриси невидимого дзвона. Варто лише сонячному промінню пробитися крізь туман, як павутина починає переливатися всіма кольорами райдуги, перетворюючись на блискотливе гроно діамантів, і число *e* постає перед нами у всій своїй красі" [3].

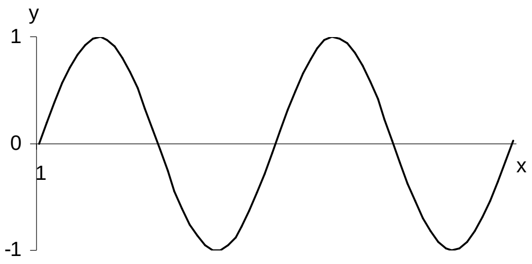


Рисунок 4 – Синусоїда $y = \sin x$. Характерній формі цієї кривої відповідають математичні властивості, тісно пов'язані із властивостями експонентної кривої, зображеної на рис.2. Синусоїда описує широке коло фізичних явищ, включаючи хвильовий рух і періодичні коливання

Якщо розглянути математичну функцію $y = \sin x$ (рис. 4), то на перший погляд синусоїда має досить віддалену подібність із експонентою. Синусоїда періодична, тоді як експонентна крива безупинно та все швидше зростає. Зв'язок між цими двома кривими виявиться, якщо накреслити графік похідної синусоїди: ми одержимо іншу синусоїду, зсунуту на чверть довжини хвилі праворуч щодо першої, тобто косинусоїду. Побудувавши графік кута нахилу дотичній косинусоїди, ми зрушимо останню ще на чверть довжини хвилі праворуч й одержимо криву, що збігається з першою синусоїдою, тільки перевернутою. Проробивши таку операцію ще два рази, ми повернемося до вихідної кривої. Таким чином, експонента й синусоїда (або косинусоїда) мають одну загальну важливу властивість симетрії, що встановлює зв'язок між формою самої кривої та формою кривої, що описує кут нахилу дотичної до неї.

Цей глибокий зв'язок між функціями $y = e^x$ і $y = \sin x$ повністю виявляється в теорії комплексних чисел: коли x - квадратний корінь із негативного числа, $\exp(x)$ стає сумішшю двох хвиль – синусоїдальної та косинусоїдальної. Незвичайні особливості числа *e* забезпечили йому роль фундаментальної константи в апараті математичного аналізу - диференціальному та інтегральному численнях, чому чимало сприяли праці Леонарда Ейлера та інших відомих математиків, зокрема встановленням співвідношення між експонентою та тригонометричними функціями:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (1)$$

Згідно з (1):

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \qquad (2)$$

Тобто $\cos y = Re\, e^{iy}$, $\sin y = Im\, e^{iy}$.
Зокрема $e^{i\pi} = -1$.

Фізичний зміст числа *e*. Як було розглянуто вище, у всіх випадках, коли приріст величини пропорційний самій величині, вона змінюється в часі експоненціально. Фізичні системи, поведінка яких описується експонентою, здатні проявляти й періодичну, "синусоїдальну", поведінку.

Прикладом такої системи може слугувати так званий гармонічний осцилятор, скажімо, математичний маятник або просто маса, прикріплена до пружини. Всім відомо, що незатухаючі коливання у часі можна описати сумою синусоїд й косинусоїд. Такі коливання у математиці, фізиці й електротехніці описує експоненціальна функція (з амплітудою, яка дорівнює одиниці): $e^{iw\,t} = \cos wt + i\sin wt$, де ω – частота коливань. Якщо ж описувати затухаючі коливання, маємо формулу (1):

$$e^{-d\,t}e^{iw\,t} = e^{-d\,t}(\cos wt + i\sin wt),$$

де δ – декремент затухання.

Припустимо тепер, що сила, яка діє на тіло, що коливається на пружині, спрямована не до положення рівноваги, а від нього. Поводження системи в цьому випадку виявилося б зовсім іншим. Відхилення маси від рівноваги наростало б по експоненті, маса розганялася б усе швидше в тому самому напрямку. Із пружинами таке неможливо, а в інших системах трапляється. Іноді система в одних умовах коливається за синусоїдальним законом, а в інших "зривається" в експонентний режим.

Таким чином, при негативному коефіцієнті пропорційності має місце "експоненціальне згасання" (аналогічне закону радіоактивного розпаду: $N(t) = N_o e^{-l\,t}$, де $N(t)$, N_0 – відповідно, поточна і початкова кількість радіоактивних ядер, l – стала радіоактивного розпаду), при позитивному – "експоненціальний вибух" (аналогічний протіканню розгалуженої ланцюгової реакції). До експоненціальних залежностей слід віднести також різні температурні залежності: тиск пари рідини, провідності діелектриків і напівпровідників, швидкості хімічних реакції й т.і. Сюди також варто віднести залежності, що включають енергетичний параметр у показнику експоненти: вольт-амперні характеристики діодів і тріодів, намагніченість матеріалів, як функція прикладеного поля, насичення розчинів тощо. Всі ці залежності щільно пов'язані із законом розподілу Больцмана, який справедливий для частинок, які знаходяться в будь-якому зовнішньому потенціальному полі: $n = n_o \exp\left(-\frac{W_n}{kT}\right)$. Розподіл Больцмана описує вплив двох факторів: вплив силового поля, який упорядковує розподіл частинок, і вплив теплового хаотичного руху частинок.

Експонентні залежності з негативним показником майже завжди описують повернення системи до рівноваги, з якої вони зовнішнім впливом були виведені. Це досить частий випадок. Набагато менше процесів, динаміка яких може бути описана експонентною залежністю з позитивним показником. Їх менше, але значимість чи не найбільша: наприклад, на початку 1987 р. свердловський вчений-фізіолог В.Г. Бочків захистив кандидатську дисертацію, що розкриває суть виявленої ним закономірності, застосованої до широкого класу живих і неживих систем. Ця закономірність дозволяє оцінювати ступінь функціональної досконалості біологічних, технічних, економічних і інших систем, якість їхньої організації, що також виражається експонентними залежностями.

Цікавим є випадок, коли й коефіцієнт k при x у показнику експоненти e^{kx} є змінним параметром. Наприклад, розподіл Гауса $p(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$ (де $p(x)$ – густина ймовірності, s^2 – дисперсія) для розподілу ймовірностей, або нормальний розподіл, відіграє найважливішу роль у багатьох галузях знань, особливо у фізиці. Фізична величина підпорядкована нормальному розподілу, якщо вона є випадковою (тобто знаходиться під впливом випадкових факторів). Оскільки така ситуація найбільш розповсюджена, тому у природі найчастіше зустрічається саме нормальний розподіл, звідки й його назва. Розподіл Максвела, який описує густину розподілу ймовірності залежно від одновимірної швидкості має форму нормального розподілу:

$$f_u(u_i) = \sqrt{\frac{m}{2pkT}} \exp\left(-\frac{mu_i^2}{2kT}\right),$$

а функція Максвелла густини ймовірності для модуля швидкості є комбінацією степеневої функції й експоненти:

$$f_u(u) = 4p\left(\frac{m}{2pkT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right).$$

Змінним параметром тут є температура, від якої залежить поведінка функції.

Оскільки експонентна (показникова) залежність набагато сильніша, ніж степенева, поведінка функції Максвелла при великих значеннях швидкості повністю визначається експонентою, а при малих другим степенем швидкості (рис. 5), тобто ця функція має екстремум за певного значення швидкості (найбільш ймовірна швидкість).

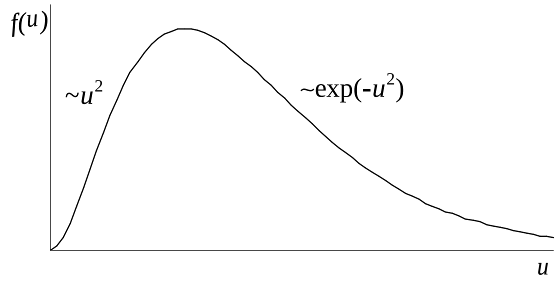


Рисунок 5 – Графік функції Максвелла

Подібну залежність має і функція Кірхгофа для спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, яка описується формулою Планка: $r_{n,T} = \frac{2phn^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{hn}{kT}\right) - 1}$.

Цікавим є той факт, що за допомогою комбінації трьох експонент можна описати будь-яку експериментальну залежність.

Матеріал і результати досліджень. Лекційна демонстрація експоненти. Лекційна демонстрація з побудови експоненціальної функції з від'ємним показником за участі студентів проводиться таким чином. Доповідач (звичайно - це студент першого або другого курсу) спочатку наводить основні відомості про те, що таке експонента та її математичний і фізичний зміст. Далі проводиться демонстрація на прикладі закону радіоактивного розпаду: $N = N_o e^{-lt} = N_o 2^{-t/T_{1/2}}$. На демонстраційному стенді (рис. 6) нанесена декартова прямокутна система координат, де на вісі абсцис встановлені вертикальні координатні лінійки, на яких можуть рухатись кольорові кульки, що відповідають координатним точкам. На осі ординат відмічена умовна початкова кількість радіоактивних ядер $N_0(t=0)$. Далі відкладаються точки, кожна наступна ордината яких буде вдвічі меншою за попередню (для випадку $T_{1/2}=1$ рік). Ці точки утворюють плавну лінію. Для кращого уявлення студентами залежності кривизни експоненти від коефіцієнту l (сталої радіоактивного розпаду) та періоду напіврозпаду $T_{1/2}$ (які пов'язані між собою формулою $l = ln2/T_{1/2}$) демонстратор задає ще декілька періодів напіврозпаду та відображає отримані залежності на тій же координатній площині (для зручності кожна залежність відображена кульками різних кольорів, рис. 6).

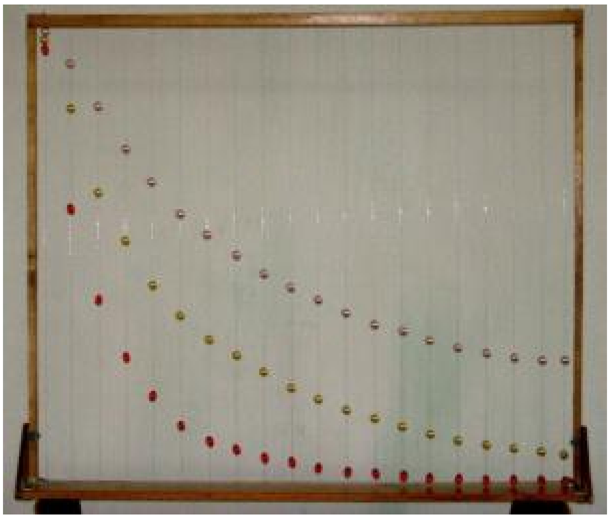


Рисунок 6 – Демонстраційний стенд.
Етапи побудови студентами кривих залежності $N = N_o e^{-lt} = N_o 2^{-t/T_{1/2}}$ з різними періодами напіврозпаду $T_{1/2}$.

Доповідач супроводжує демонстрацію доповіддю, в якій наводить основні відомості про експоненті залежності в природі з негативним і позитивним показником експоненти (див. вище).

Висновки. Експонентна залежність від часу з'являється в системах, у яких, по-перше, немає пам'яті (тобто кореляції минулого з майбутнім), а по-друге, фундаментальні властивості системи не змінюються з часом. Глибинний зміст цієї світової константи за великим рахунком досі залишається terra incognita для багатьох дослідників і спеціалістів різних областей природознавства й економіки.

Усі перелічені властивості константи *e* наводять на думку про те, що гармонійність Природи побудована на якомусь єдиному основному законі матеріального світу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. М.: "Наука", 1982. – 280 с.
2. Шень А. Логарифм и експонента. - М.: МЦНМО, 2005. – 60 с.
3. Математична хрестоматія / За ред. проф. М.І. Кованцова - К.: "Рад.школа", 1977. – 380 с.
4. http://ru.wikipedia.org
5. http://arbuz.uz/x_stati.html
6. http://www.aimatrix.nm.ru/math/b01_004.htm

Стаття надійшла 25.06.08
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. Шмандієм В.М.