УДК 621.385

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ У СИСТЕМАХ ЗІ СКЛАДНОЮ КОНФІГУРАЦІЄЮ ЕЛЕКТРОДІВ

Нікітенко О.М., к.т.н, доц.
Харківський національний університет радіоелектроніки
61166, м. Харків, пр. Леніна 14,
E-mail: nikon@kture.kharkov.ua

Исследование и моделирование физических процессов реальных объектов требуют в зависимости от детализации описания процесса уточнения или дополнительного описания отдельных рассматриваемых составляющих. Одним из таких объектов являются электроды сложной геометрии, в которых необходимо определить распределение электростатических полей.

Ключевые слова: электроды сложной конфигурации, уравнение Лапласа, приборы М-типа.

The investigation and simulation of physical processes in real objects require closer definition or additional description of separate parts, depending on process’ elaboration. One of the such objects are electrodes with complex configuration that it is need to define electrostatic fields’ distribution.

Key words: electrodes with complex configuration, Laplace equation, M–type devices.

Вступ. Дослідження та моделювання фізичних процесів реальних об’єктів вимагають залежно від деталізації опису процесу уточнення або додаткового опису окремих складових частин, що розглядаються.

При визначенні аеро– та гідродинамічних характеристик літальних апаратів і суден, при вивченні дифракції електромагнітних хвиль, у задачах магнітної гідродинаміки, теплообміну, фільтрації ґрунтів, стійкості пластин та оболонок тощо виникає необхідність у обчисленні різноманітних полів – силових теплових, електромагнітних, гідродинамічних тощо.

Аналіз попередніх досліджень. У багатьох задачах вакуумної електроніки при дослідженні фізичних процесів, що мають місце в електронних приладах, постає необхідність визначення розподілу електричних полів у міжелектродному просторі як основного чинника.

Характерною особливістю полів є їх залежність не тільки від фізичних властивостей середовища, величин і характеру збудників поля, але й від їх геометричних форм, які мають у реальних задачах досить складну конфігурацію. Це створює специфічні труднощі при розробці методів обчислення полів, що пов`язано з необхідністю врахування геометричної інформації й додавання до неї обчислювального алгоритму [1 – 7].

Проектування та теоретичні дослідження систем зі схрещеними полями вимагають сумісного розв`язання рівнянь руху заряджених частинок, рівняння збудження та рівняння Пуасона.

Однак, спочатку, коли просторового заряду ще немає, замість рівняння Пуасона розподілення потенціалу в системі описується рівнянням Лапласа [8].

Таким чином у системах зі схрещеними полями для адекватного врахування статичних електричних полів і їх впливу на роботу системи в цілому необхідно вміти обчислювати такі поля, тобто вміти побудувати розв`язок рівняння Лапласа за складних межових умов.

Здебільшого конфігурація електродів таких приладів не є циліндричною, а має більш складну форму. З іншого боку, через форму анодного блоку розподіл електростатичного поля у таких системах є просторово неоднорідним, найчастіше просторово–періодичним, що також впливає на роботу приладів зі схрещеними полями.

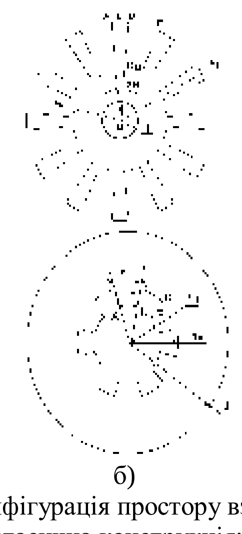
Мета роботи. Моделювання розподілу електростатичного потенціалу між електродами складної конфігурації.

Матеріал і результати дослідження.

1. Формулювання задачі.

Конфігурація систем зі схрещеними полями, які є базовими для приладів М–типу, має один із електродів, що називається уповільнюючою системою, просторово–періодичної форми за азимутом (рис. 1).

а)



б)

Рисунок 1– Конфігурація простору взаємодії
а – класична конструкція;
б – обернена конструкція

Для таких конфігурацій простору взаємодії необхідно знайти розподілення електро-статичного потенціалу за умови, що між електродами існує різниця потенціалів U_0.

Розподілення потенціалу у таких системах визначається розв'язком рівняння Лапласа, що записано у циліндричних координатах [9]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0$$

Для узагальнення системи на будь-які розміри доцільніше перейти до безрозмірних координат. Тоді матимемо

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial U}{\partial s}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0\,, \qquad (1)$$

де $s=r/r_c$.

Таким чином, необхідно здобути розв'язок рівняння (1) за таких межових умов

1. $U(1) = 0;$
2. $U(G) = U_a,$ (2)

де Γ – поверхня анодного блоку.

2. Побудова розв'язку рівняння Лапласа за складних межових умов.

Для розв'язання рівняння (1) використаємо метод відокремлення змінних.

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) із застосуванням методу відокремлення змінних має вигляд:

$$u(s,j)=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n s^n+D_n s^{-n})(A_n\sin nj+B_n\cos nj) \qquad (3)$$

Періодом анодної уповільнюючої системи зі схрещеними полями, як наведено на рис.1, є кут АОЕ, або у кутовому обчисленні $2p/N$, де N - кількість резонаторів анодної системи. Тоді вираз (3) матиме вигляд:

$$u(s,j)=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n s^n+D_n s^{-n})(A_n\sin Nnj+B_n\cos Nnj) \qquad (4)$$

через те, що $2\pi/\frac{N}{2\pi}=N$.

Для знаходження конкретного вигляду виразу (4) необхідно застосувати крайові умови.

1. Крайові умови на катоді

$$u(1,j)=0\,.$$

Через це $C_n + D_n = 0$, звідси $D_n = - C_n$. Після визначення коефіцієнту D_n, розв`язок (2) матиме вигляд:

$$u(s,j)=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})(A_n\sin Nnj+B_n\cos Nnj) \qquad (5)$$

2. Крайові умови на аноді

Дуга АВ

$$s=s_L$$
$$-q \pounds j \pounds q$$
$$u(s,j)=A_0\ln s_L+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s_L^{Nn}-s_L^{-Nn})(A_n\sin Nnj+B_n\cos Nnj)$$

3. Відрізок ВС

$$s_a \pounds s \pounds s_L$$
$$j=q$$
$$u(s,j)=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})(A_n\sin Nnq+B_n\cos Nnq)$$

4. Дуга CD

$$s=s_a$$
$$q \pounds j \pounds 2p/N-q$$
$$u(s,j)\big|_{\substack{s_a\le s\le s_L\\ j=q}}=A_0\ln s_a+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s_a^{Nn}-s_a^{-Nn})(A_n\sin Nnj+B_n\cos Nnj)=U_a$$

5. Відрізок DE

$$s_a \pounds s \pounds s_L$$
$$j=2p/N-q$$
$$u(s,j)\big|_{\substack{s_a\le s\le s_L\\ j=q}}=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})[A_n\sin Nn(\frac{2p}{N}-q)+B_n\cos Nn(\frac{2p}{N}-q)=$$
$$A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})(-A_n\sin Nnq+B_n\cos Nnq=U_a$$

Порівняємо умови (3) і (5).

$$A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})(A_n\sin Nnq+B_n\cos Nnq)=$$
$$A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(s^{Nn}-s^{-Nn})(-A_n\sin Nnq+B_n\cos Nnq)$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nC_n(s^{Nn}-s^{-Nn})\sin Nn\theta=0$$

Позначимо $F_n = A_nC_n sinNnq$, тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n(s^{Nn}-s^{-Nn})=0\,,$$ або

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n s^{Nn}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n s^{-Nn}\,.$$

Для будь-якого фіксованого s це рівняння виконуватиметься за $F_n = 0$. Таким чином, остаточно маємо

$$u(s,\varphi)=A_0\ln s+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(s^{Nn}-s^{-Nn})\cos Nn\varphi \qquad (6)$$

Отже, залишилося визначити коефіцієнти A_0 та A_n.

3. Визначення коефіцієнтів у розв'язанні рівняння Лапласа.

Визначити коефіцієнти у виразі (6) можна за допомогою кількох методів: розвинення виразу (6) у ряд Фур'є, варіаційних методів, методу Л.В. Конторовича, методу Треффтца, методів Рітца та Гальоркіна, методу сіток тощо.

Для визначення коефіцієнтів A_i розвинемо вираз (6) у ряд Фур`є. При визначенні коефіцієнтів ряду Фур`є зауважимо, що вираз (6) є парною функцією, тоді коефіцієнти ряду Фур`є визначаються як [10]

$$a_m = \frac{N}{\pi}\int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} u(s,\varphi)\cos Nm\varphi\, d\varphi$$

1. Розвинемо ліву частину виразу (6)

$$a_0 = \frac{N}{\pi}\int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta} U_a\, d\varphi = 2U_a$$

$$a_m = \frac{N}{\pi}U_a\int_{-\theta}^{\frac{2\pi}{N}-\theta}\cos Nm\varphi\, d\varphi = 0$$

2. Розвинемо перший доданок правої частини

$$a_0 = \frac{N}{p}\Big[\int_{-q}^{q} A_0 \ln s\, dj +$$

$$\int_{q}^{\frac{2p}{N}-q} A_0 \ln s\, dj\Big] = \frac{2A_0}{p}\left[p \ln s_a + qN\ln\frac{s_L}{s_a}\right]$$

$$a_m = \frac{NA_0}{p}\Big[\ln s_L\int_{-q}^{q}\cos Nmj\, dj +$$

3.

$$\ln s_a\int_{q}^{\frac{2p}{N}-q}\cos Nmj\, dj\Big] = \frac{2A_0}{pm}\ln\frac{s_L}{s_a}\sin Nmq$$

Розвинемо другий доданок правої частини

$$a_0 = \frac{N}{p}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-q}^{q}\sum_{n=1}^{\infty}A_n(s_L^{Nn}-s_L^{-Nn})\cos Nnj\, dj + \\ \displaystyle\int_{q}^{\frac{2p}{N}-q}\sum_{n=1}^{\infty}A_n(s_a^{Nn}-s_a^{-Nn})\cos Nnj\, dj\end{array}\right] =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{pn}(s_L^{Nn}-s_L^{-Nn}-s_a^{Nn}+s_a^{-Nn})\sin Nnq$$

За m = n

$$a_n = \frac{N}{p}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-q}^{q}A_n(s_L^{Nn}-s_L^{-Nn})\cos Nnj\, dj + \\ \displaystyle\int_{q}^{\frac{2p}{N}-q}A_n(s_a^{Nn}-s_a^{-Nn})\cos Nnj\, dj\end{array}\right] =$$

$$= \frac{A_n}{pn}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\left(s_L^{Nn}-s_L^{-Nn}\right)\left(Nnq+\frac{\sin 2Nnq}{2}\right)+ \\ \displaystyle\left(s_a^{Nn}-s_a^{-Nn}\right)\left[(p-Nq)n-\frac{\sin 2Nnq}{2}\right]\end{array}\right\}$$

Для перевірка правильності обчислення коефіцієнтів ряду Фур`є припустимо, що $s_a = s_L$, тоді

1. $a_0 = 2U_a;\ a_m = 0$
2. $a_0 = 2A_0\ln s_a;\ a_m = 0$
3. $a_0 = 0;\ a_m = A_m\ (m = n);\ a_m = 0\ (m¹ n)$

$$\begin{array}{l} 2U_a = 2A_0\ln s_a + 0 + 0 + \ldots\ldots \\ \ 0\ =\ 0 \qquad + A_1 + 0 + \ldots\ldots \\ \ 0\ =\ 0 \qquad + 0 + A_2 + \ldots\ldots \end{array}$$

$$A_n = 0$$

Звідси $A_0 = U_a/\ln s_a$. що збігається з розв`язком рівняння Лапласа для магнетронного діода. Отже, за допомогою розвинення виразу (6) у ряд Фур`є й наступного розв'язання системи лінійних рівнянь, можна визначити коефіцієнти A_i. (для кількох конструкцій системи зведено в таблицю 1 [12]).

У ряді випадків застосування методу Треффтца призводить до простіших обчислень порівняно із застосуванням методів Рітца та Гальоркіна, оскільки за методом в Треффтца обчислюються лише інтеграли по межі області, а не по самій області [11].

Для визначення коефіцієнтів виразу (6) скористаємося методом Треффтца. Метод Треффтца є дещо протилежним щодо методів Ритца та Гальоркіна. В останніх методах розв'язок задачі шукають у вигляді лінійної комбінації функцій, які задовольняють диференційному рівнянню, але не задовольняють межовим умовам.

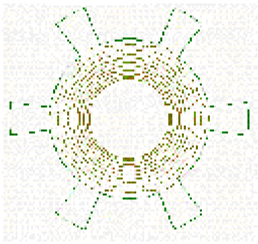
Невизначені коефіцієнти, що входять до розв'язку задачі, за методом Треффтца визначаються таким чином, аби найточніше виконувалися межові умови; у методах Ритца та Гальоркіна невизначені коефіцієнти визначаються з умови найточнішого розв'язання диференційного рівняння задачі.

Методика знаходження коефіцієнтів за використанням цього методу була детально розглянута у [12,13]. Тут ми лише наведемо результати обчислення коефіцієнтів рівняння (6), що отримано за методом Треффтца (табл. 2 [12]).

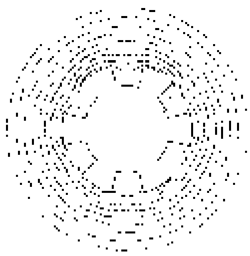
Порівнюючи значення коефіцієнтів у таблицях 1 та 2, можна зробити висновок, що за порядком коефіцієнти збігаються. Отже, за необхідності й коли не вимагається висока точність результатів, то можна розраховувати коефіцієнти рівняння (6) за методом Треффтца [11].

Результати теоретичних досліджень наведено на рис. 2.

Висновки. Запропоновану методику визначення розподілення електростатичного потенціалу можна застосовувати для циліндричних конструкцій зі складною конфігурацією електродів.



а)



б)

Рисунок 2 – Результати теоретичних досліджень
а – класична конструкція; б – обернена конструкція

ЛІТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике.-К.: Наукова думка, 1974.- 259 с.
2. Рвачев В.Л. К вопросу о построении координатных последовательностей.// Дифференциальные уравнения. - 1970. - № 6. -С.1034–1047.
3. Рвачев В.Л. Применение R–функций к решению краевых задач математической физики.//В кн.: Материалы семинара по численным методам решения внутренних краевых задач электродинамики СВЧ. –М.: Электроника, 1971. -Вып 9 (35).
4. Рвачев В.Л., Шкляров Л.И. О применении метода Бубнова–Галеркина.//Дифференциальные уравнения. -1965. -№11. - С. 1537–1543.
5. Волков А.П., Манько Г.П., Рвачев В.Л. О решении одной краевой задачи методом R–функций.//Дифференциальные уравнения. - 1967. -№ 9. -С. 1602–1605.
6. Манько Г.П., Рвачев В.Л., Шкляров Л.И. О построении последовательносты координатных функцый при решении задач Дирихле и Неймана методом R–функций для областей сложной формы.//Дифференциальные уравнения. -1968. -№4. -С. 702–713.
7. Калекин Ю.О., Подгорній А.М., Рвачев В.Л. Методы алгебры логики (R–функций) в краевых задачах механики для областей сложной формы.//В кн.: Сборник аннотаций XIII Медународного конгресса по теоретической и прикладной механике. - М.:Наука,1972. - С. 58–59.
8. 8 Morishita Y. CAD of Microwave Tubes //Теребідзьон гаккай ші. -1978. -V.32, N3. -P. 182–188.(Яп.).
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Госиздат технической литературы, 1953. -679 с.
10. Толстов Г.П. Ряды Фурье. -М.:Наука, 1980. – 384 с.
11. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. -М.:Высшая школа, 1963. –415 с.
12. Нікітенко О.М. Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні.//Радіотехніка.-2000. - Вип.113. - С.113–120.
13. Нікітенко О.М Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні оберненої конструкції.//Радіотехніка.-2000. -Вип. 115. -С. 111–116.

Стаття надійшла 30.09.2008 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. Єлізаровим О.І.