УДК 537.87.+517.98

ДИФЕРІНТЕГРАЛЬНА ПАРАДИГМА ЗАКОНІВ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ФРАКТАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

Онуфрієнко В.М., д.ф.-м.н., проф., Онуфрієнко Л.М., к.ф.-м.н., доц.
Запорізький національний технічний університет
69063 м.Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
E-mail: onufr@zntu.edu.ua

Определено дифферинтегральную связь между геометрическими и физическими свойствами фрактальной среды. Классические электродинамические законы записаны после ввода альфа-польных моментов, что позволяет анализировать физические явления в неоднородной структурированной специальным образом среде.

Ключевые слова: дифферинтеграл, фрактальная среда, фрактальные заряды и токи.

It is defined the differintegral relation among geometrical and physical properties of fractal mediums. Classical electrodynamic laws are written down after input an alpha-poles of the moments. It has allowed to analyze the physical phenomena in the nonuniform structured special medium.

Key words: fractal medium, differintegral, fractal charge and current.

Вступ. Теорія випромінювання та поширення електромагнітних хвиль з часів відкриття електромагнітних хвиль і формулювання рівнянь Максвела стала одним із найважливішим розділів електродинамічної науки, на засадах якого формується сучасний науковий напрямок, пов‘язаний з вивченням фізичної природи та прогностики закономірностей випромінювання та взаємодії поля з фрактально структурованим середовищем. Новими конкретними реалізаціями штучних комплексних середовищ є біанізотропне середовище у вигляді кірального середовища та Ω-середовища, які використовуються у сучасній надвисокочастотній техніці у вигляді покриттів із поглинальними, відбивальними та іншими спеціальними властивостями.

Вибір адекватної фізико-математичної моделі фрактальної будови середовища надає можливість розглядати взаємодію структурованої речовини з електромагнітним полем, взаємодію з контурами, поверхнями і тілами штучно сконструйованих джерел поля, що створює умови формування елементної бази нового сучасного напрямку - фрактальної електродинаміки.

Розробка математичних методів розрахунків інтегродиференціальних моделей розподілів джерел електромагнітних полів у фрактальному середовищі виступає визначальним фактором у розвитку нових методів аналізу існуючих і створення нових зразків штучного середовища та елементів випромінювання енергії. Одержані у цьому напрямку результати важливі як для поглиблення та удосконалення теоретичних уявлень про процеси взаємодії і випромінювання електромагнітного поля відповідними структурами, так і для правильного вибору адекватних принципів функціонування та способів технічної реалізації нових створюваних геометрично та фізично фрактальних елементів.

Формулювання диферінтегральної парадигми надає можливостей визначати фізичні особливості електромагнітного поля, збуджуваного розподілами зарядів і струмів поблизу та всередині несуцільних фрактально структурованих штучних метаматеріалів.

Аналіз попередніх досліджень. До деякого часу теоретична модель рівнянь Максвелла для визначення електромагнітних векторів поля успішно реалізувалась за допомогою різних математичних моделей, побудованих на класичних уявленнях про контури, поверхні та об‘єми, що виділяються на етапі постановки задачі [1].

Досвід показує, що застосування відомих моделей у постановках задач для неоднорідних фрактальних середовищ необхідно здійснювати на узагальнених означеннях довжини, площі та об‘єму, а саме таких, що дозволяють приписувати поняття «довжини» значно більш широкому класу множин, ніж тим, що для конфігурування потребують тільки понять спрямного контуру [2,3]. Конструктивне (а не традиційне аксіоматичне) означення довжини [4] значно збільшує клас множин, що вважаються спрямними і тому можуть використовуватись у постановках задач за класичною теоретичною моделлю рівнянь Максвелла [5,6].

Мета роботи. Теоретично узагальнити закони електродинаміки за допомогою вводу диферінтегральних розподілів зарядів і струмів у моделі фрактального середовища.

Матеріал і результати дослідження. Масштабно інваріантні множини (фрактали), наділені властивостями інваріантності відносно паралельних переносів у будь-якому напрямку та відносно зміни масштабів довжини для площини та об‘єму, будуть далі використовуватись як наближення в описах природної структури носіїв зарядів і струмів аналогічно тому, як це здійснювалось раніше із застосуванням класичних понять прямої, площини та гладких контурів і поверхонь.

Означення безперервних функцій густини, що входять до опису статистичного розподілу та упорядкованого руху великої кількості N дискретних заряджених частинок в об‘ємі V, залежить від вибору елементів об‘єму і поверхні. Оцінка протяжності околу точки O, що відповідає зламу контуру, є степеневою функцією, залежною від довжини вимірювальної ланки Δx і деякого параметру $0<\alpha<1$, який характеризує конфігурацію точки зламу контуру. Значення $\alpha=1$ відповідає звичайній математичній точці O зламу, яка може бути навантажена одним точковим зарядом або сукупністю точкових зарядів згідно з класичною моделлю. Якщо $0<\alpha<1$, то точка О має фрактальні властивості (вона, залишаючись точкою, розглядається як “товста”).

Аналогічні узагальнення можна зробити і відносно просторової геометричної неоднорідності (просторової “товстої” точки), заповненої сукупністю зарядів q_i. Таку модель далі будемо використовувати для визначення фізичного змісту заряду “товстих” точок, що заповнюють деякий об‘єм V^{α}, який має властивості масштабної інваріантності, що характеризуються скейлінговим показником α [5].

У класичному розумінні для об‘ємної густини заряду $\rho(\vec{r})$ в об‘ємі V^{α} повинно виконуватись

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_{V^{\alpha}} \rho(\vec{r})dV^{\alpha} . \qquad (1)$$

Мікроскопічна густина дорівнює

$$\rho^{\alpha}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V^{\alpha}\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\Delta V^{\alpha}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^{\alpha}(\vec{r}-r_i) . \qquad (2)$$

де $\delta^{\alpha}(\vec{r}-\vec{r}_i)$ - дельта-функція Дірака.

Основною мікроскопічною характеристикою поляризованої множини незалежно від механізму поляризації (поляризація постійна, обумовлена внутрішньою будовою, або тимчасова, індукована зовнішнім електричним полем) є α-польний момент, що виникає внаслідок мікроскопічного розділення центрів позитивних і негативних зарядів і розміщенням їх уздовж деякої вісі.

Математично α-польний момент поляризованої нейтральної множини визначимо формулою:

$$\vec{p}^{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{d}_i^{\alpha} = Q\vec{d}^{\alpha}; \qquad (3)$$

де підсумовування проводиться за всіма зарядами у множині, а $\vec{d}_i^{\alpha}$ - вектори, що проведені з центра множини до зарядів. Член $Q\vec{d}^{\alpha}$ праворуч – це α-польний момент еквівалентного α-поля, що складається з усіх, що входять до складу множини, позитивних і негативних зарядів, сконцентрованих у своїх центрах, що розділені вектором $\vec{d}^{\alpha}$, проведеного з центра негативних зарядів до центра позитивних зарядів.

Перерахований до одиниці об‘єму α-польний момент усіх множин в об‘ємі комірки ΔV_i^{α} із центром у точці $\vec{r}_i$ обчислюється за формулою:

$$\vec{P}^{\alpha}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^{N} q_j \vec{d}_j^{\alpha} / \Delta V_i^{\alpha} . \qquad (4)$$

Це є об‘ємна щільність α-польного моменту $\vec{P}^{\alpha}(\vec{r})$ (поляризованість матеріалу). Цією величиною визначається усереднений макроскопічний стан поляризації в околі кожної точки заповненої матеріальної області.

У твердих тілах (металах) з вільними електронами, у штучних тілах із металізованими включеннями, в іонізованих рідинах (електролітах) і іонізованих газах, у плазмі, в області просторового заряду між електродами можна викликати упорядкований рух частинок одного знаку або обох знаків шляхом прикладання до зарядів відповідних зовнішніх сил. Середня макроскопічна характеристика такого потоку заряджених частинок може бути представленою безперервною, повільно змінюваною, векторною функцією – об‘ємною густиною струму:

$$\vec{j}^{\alpha}(\vec{r}_i) = \sum q_j \vec{v}_j^{\alpha} / \Delta V_i , \qquad (5)$$

що визначається інтерполяцією за величиною та напрямку дискретних значень, що задаються в центрах об‘ємних комірок ΔV_i (із координатами центрів, що визначаються векторами $\vec{r}_i$).

Підсумовування проводиться за всіма зарядами q_j в об‘ємі ΔV_i; $\vec{v}_j^{\alpha}$ - швидкість заряду q_j. Видно, що величина $q_j \vec{v}_j^{\alpha}$ є електричним аналогом імпульсу рухомого заряду, мірою його величини і швидкості.

Введення у розгляд не тільки об‘ємних і поверхневих густин зарядів, але й об‘ємних густин α-польних моментів, необхідне для уявлення про перебіг усереднених спостережуваних макроскопічних явищ Це виявляється наслідком того, що не можна ігнорувати навіть дуже мале розділення статистичних центрів позитивних і негативних зарядів у кожній окремій множині, адже таке розділення призводить до появи мікроскопічного α-поля. Сумісний ефект великої кількості таких мікроскопічних α-полів, що відповідним чином компонуються під дією зовнішніх сил, перетворює все тіло у великий α-поль. Із тих же причин для опису упорядкованого руху зарядів недостатньо використання тільки об‘ємної і поверхневої щільності струму.

Магнітний момент, що виникає за рахунок упорядкованого мікроскопічного кругового руху зарядів відносно загальної вісі в елементі об‘єму ΔV_i^α, визначимо як:

$$\vec{m}_c^\alpha(\vec{r}_i) = \sum[\vec{d}_j \times q_j \vec{v}_j^\alpha]/2 . \qquad (6)$$

Інтерполяцією дискретних значень одержуємо безперервну і повільно змінювану об‘ємну щільність магнітного моменту $\vec{M}_c^\alpha(\vec{r})$, або намагніченість (обумовлену циркуляцією зарядів):

$$\vec{M}_c^\alpha(\vec{r}_i) = \vec{m}_c(\vec{r}_i)/\Delta V_i^\alpha . \qquad (7)$$

Розроблювана модель неоднорідностей з масштабною інваріантністю та введення структурованих α-полів надає можливості узагальнити відомі класичні моделі розподілів (квадруполів, октуполів і мультиполів у загальному випадку), що складаються з двох близько розташованих рівних і антипаралельних електричних або магнітних α-польних моментів.

Зазначимо, що для класичної моделі неоднорідного середовища у вигляді сукупності множин з суцільним заповненням у загальному випадку неможливо установити скільки-небудь простої залежності поля від розміщення одних тільки вільних зарядів, подібної до закону Кулона. Розглядом рівнянь, що зв‘язують величини і характеризують поле у суміжних точках простору, можна одержати порівняно прості співвідношення меж цими величинами, бо лише диференціальні співвідношення повністю визначаються властивостями даного елемента середовища незалежно від властивостей віддалених його ділянок.

Для об‘ємної густини фрактального заряду $\rho^\alpha(\vec{r})$ у суцільному об‘ємі V повинно виконуватись (див. (1), (2)):

$$Q^\alpha = \sum_{i=1}^{N} q_i^\alpha = \int_{V^\alpha} \rho^\alpha(\vec{r})dV . \qquad (8)$$

З іншого боку,

$$\rho^\alpha(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i^\alpha}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{N} q_i^\alpha \, \delta(\vec{r} - r_i) . \qquad (9)$$

Електричний α-польний момент поляризованої нейтральної множини тепер визначимо формулою:

$$\vec{p}^\alpha(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i^\alpha \vec{d}_i = Q^\alpha \vec{d}, \qquad (10)$$

де підсумовування проводиться за всіма зарядами q_i^α у множині, а $\vec{d}_i$ - вектори, що проведені з центра множини до зарядів. Член $Q^\alpha \vec{d}$ справа – це α-польний момент еквівалентного α-поля, що складається з усіх, що входять у склад множини, позитивних і негативних зарядів, сконцентрованих у товстих фрактальних точках, що розділені вектором $\vec{d}$.

Перерахований до одиниці об‘єму α-польний електричний момент усіх множин зарядів в об‘ємі суцільної комірки ΔV_i із центром в точці $\vec{r}_i$ обчислюється за формулою:

$$\vec{P}^\alpha(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^{N} q_j^\alpha \vec{d}_j / \Delta V_i . \qquad (11)$$

За визначенням $\vec{P}^\alpha(\vec{r})$ набуває дискретних значень $\vec{P}^\alpha(\vec{r}_i)$ у центрах комірок ΔV_i і змінюється між центрами неперервно і гладко за величиною і напрямком.

Уведена модель фрактального заряду дозволяє розглядати основні поняття, що необхідні для побудови теорії розподілів таких зарядів як у суцільному, так і у фрактальному середовищі.

Для однорідного діелектричного середовища, та для заданого розподілу вільних зарядів потенціал і напруженість поля в ε разів менше потенціалу та напруженості поля у вакуумі (це положення закладається в основу усієї формальної теорії діелектриків). З цього безпосередньо випливає з урахуванням визначених властивостей фрактального заряду, що потенціал φ^α і напруженість E^α поля фрактального заряду в однорідному діелектрику можна знаходити за узагальненою формою закону Кулона:

$$\varphi^\alpha = \frac{Q^\alpha}{\varepsilon R}, \quad E^\alpha = \frac{Q^\alpha}{\varepsilon R^2} . \qquad (12)$$

Наявність скейлінгового показника α в одержаних узагальненнях законів дає можливість прогнозувати відомі та нові топологічні властивості для потенціалу φ^α і напруженості E^α електричного поля.

Нехай на двох достатньо близько розташованих поверхнях S_+ і S_- розміщено фрактальні заряди протилежних знаків так, що на протилежних елементах обох поверхонь густини зарядів $\sigma_+^\alpha > 0$ і $\sigma_-^\alpha < 0$ рівні за величиною і протилежні за знаком ($\sigma_+^\alpha = -\sigma_-^\alpha$). Якщо відстань від S_+ до S_- є малою порівняно з відстанню до точок, де визначається поле, то сукупність зарядів будемо називати фрактальним α-шаром.

Потенціал α-шару в точці P визначимо відповідно до класичних уявлень:

$$\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} = -\vec{n} l \nabla\left(\frac{1}{R}\right), \quad \vec{\tau}^\alpha = \sigma^\alpha \vec{l},$$

$$\varphi^{\alpha} = -\int_{S_+} \vec{\tau}^{\alpha} \vec{n} \nabla \left(\frac{1}{R_+} \right) dS \quad . \tag{13}$$

Величину τ^{α}, як і у класичному випадку, називаємо потужністю або моментом фрактального шару. Топологічно фрактальний α-шар може розглядатись у вигляді сукупності паралельних нормалі α-полів довжиною l із розподілом по поверхні шару з густиною σ^{α}.

Розглянемо фізичні властивості магнітного поля, що стає за нашою моделлю проміжно однозв'язним у просторі з фрактально структурованим струмом J^{α}. Циркуляція вектора $\vec{H}$ за будь-яком можлимим контуром, що не перетинає вихровий простір, дорівнює нулю. У такому однозв'язному полі можна однозначно визначити скалярний потенціал ψ^{α} магнітного поля за аналогією з потенціалом φ^{α} поля електричного:

$$\psi_1^{\alpha} - \psi_2^{\alpha} = \int_1^2 H_l^{\alpha} dl, \quad \vec{H}^{\alpha} = -grad\,\psi^{\alpha}. \tag{14}$$

За пропонованою моделлю фрактальних зарядів(струмів) із урахуванням топологічних особливостей їх будови представимо безперервну повільно змінювану векторну функцію об'ємної густини струму (електричного, якщо q_j^{α} - електричний заряд, та магнітного, якщо q_j^{α} - магнітний заряд):

$$\vec{J}^{\alpha}(\vec{r}_i) = \sum q_j^{\alpha} \vec{v}_j / \Delta V_i. \tag{15}$$

Магнітний момент, що виникає за рахунок упорядкованого кругового руху фрактальних зарядів q_j^{α} відносно загальної вісі в елементі об'єму ΔV_i, визначається як

$$\vec{m}^{\alpha}(\vec{r}_i) = \sum [\vec{d}_j \times q_j^{\alpha} \vec{v}_j]/2 = \sum \left\langle [\vec{r}_j \times q_j^{\alpha} \vec{v}_j]/2 \right\rangle,$$

$$\vec{M}^{\alpha}(\vec{r}_i) = \vec{m}^{\alpha}(\vec{r}_i)/\Delta V_i \ . \quad , \tag{16}$$

а інтерполяцією дискретних значень одержуємо безперервно і повільно змінювану об'ємну щільність магнітного моменту $\vec{M}^{\alpha}(\vec{r})$, або намагніченість, що обумовлена циркуляцією фрактальних зарядів.

Наведені означення диферінтегральних операцій теорії поля утворюють базу для обґрунтування у електродинаміці можливості застосування класичних рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах, що узагальнюються у термінах диферінтегральних $\alpha-$ форм, які виникають на етапі постановки задач про визначення компонент електромагнітного поля у фрактально структурованих штучних середовищах.

За допомогою інваріантного визначення похідних дробового порядку дельта-функції Дірака $\delta(P)$ узагальнюється зв'язок між густиною фрактального розподілу заряду(струму) та $\alpha-$ формою, який використано для конструювання $k+\alpha-$ кратного шару на поверхні, що є узагальненням класичних простого та подвійного шару.

Із теореми Гаусса відтворимо напруженість поля, створюваного фрактальним точковим зарядом q в однорідному середовищі у вигляді

$$\vec{E}^{(\alpha)} = \vec{r}_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\Gamma(3+\alpha)}{2r^{\alpha+2}}, \quad 0 < a < 1, \tag{17}$$

що, очевидно, узагальнює формулу обчислення напруженості електричного поля для точкового ($\alpha = 0$) класичного заряду ($E \sim \frac{1}{r^2}$) і класичного ($\alpha = 1$) електричного диполя ($E \sim \frac{1}{r^3}$) у єдиній формі.

Для переходу від інтегральної форми рівнянь Максвелла до диференціальної на першому етапі звичайно передбачається існування гладких похідних струмів в однорідному середовищі.

У визначеннях густини зарядів і струмів диференціальні операції дивергенції та ротора визначаються наступними формулами:

$$div\vec{P}^{\alpha} = \lim_{\Delta V^{\alpha} \to 0} \frac{\int_{\sigma^{\alpha}} \vec{n} \cdot \vec{P} d\sigma^{\alpha}}{\Delta V^{\alpha}}; \quad rot\vec{M}^{a} = \lim_{\Delta V^{a} \to 0} \frac{\int_{s^{a}} \vec{n} \times \vec{M} ds^{a}}{\Delta V^{a}},$$

де σ^{α} - замкнута навколо об'єму ΔV^{α} поверхня. З безперервності функцій $\vec{P}^{\alpha}$ та $\vec{M}^{\alpha}$ у неоднорідному середовищі випливає існування математичної границі при $\Delta V^{\alpha} \to 0$.

У нашому випадку вибір покриття, що згладжує фрактальні струми, і пов'язане з цим введення диферінтегральних α-характеристик дозволяє записувати рівняння Максвелла і, що випливає з них, векторне рівняння Пуасона $\nabla^2 \vec{H}^{\alpha} = -rot\,\vec{j}^{\alpha}$ з розв'язком у термінах α-характеристик, що перетворюється в узагальнений закон Біо-Савара-Лапласа для фрактального розподілу струму $\vec{j}^{\alpha}$ в об'ємі V

$$\vec{H}^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\left[\vec{j}^{\alpha}(\vec{r}'), \nabla |\vec{r} - \vec{r}'| \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'. \tag{18}$$

Одержана форма узагальненого закону Біо-Савара-Лапласа дозволяє конструювати адекватні фізико-геометричні моделі для аналізу магнітного поля в середовищах для струмопровідних контурів і поверхонь, що допускають фрактальну інтерпретацію. Якщо покласти $\alpha = 1$, то утворюється вираз для магнітного поля, що збігається з класичним узагальненим законом Біо-Савара-Лапласа для ідеально гладкого контуру.

Для ідеального лінійного струму на фрактальному L контурі густину визначимо у вигляді $\vec{j}^{\alpha}(\vec{r}) = \vec{\tau}_0 I\,\delta^{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}')$, де $(\vec{r}, \vec{r}')$ описують точки на поверхні S, до якої лінія струму ортогональна, $I = const$, $\vec{\tau}_0$ - дотичний вектор до контура L у точці $\vec{r}'$, $\delta^{\alpha}(\vec{r} - \vec{r}')$ - двовимірна α-характеристика дельта-функції Дірака, то із закону Біо-Савара-Лапласа маємо

$$\vec{H}^{\alpha}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\int\limits_V \frac{\left[\vec{\tau}_0 \delta^{\alpha}(\vec{r}'' - \vec{r}'), \nabla|\vec{r} - \vec{r}''|\right]}{|\vec{r} - \vec{r}''|^2} dv'', \qquad (19)$$

звідки для прямолінійного струму, що тече вздовж осі z із диферінтегральним елементом $\vec{\tau}_0 d^{\alpha} l' = \vec{z}_0 d^{\alpha} z'$ у циліндричних координатах одержуємо вектор магнітного поля:

$$\vec{H}^{(\alpha)} = \vec{\varphi}_0 \frac{I}{2\pi} \frac{A(\alpha)}{r^{\alpha}}, \qquad (20)$$

$$A(\alpha) = \frac{l^{1-\alpha}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(2-\alpha)}(1 - e^{-i\alpha\pi}),$$

$$\vec{H}(r) = \vec{\varphi}_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad \alpha = 1.$$

Прецизійні виміри магнітного поля прямолінійного провідника показують [7], що задовільний збіг експериментальних даних із результатом розрахунку за класичною формулою спостерігається тільки для малих значень струму I.

Застосовувана нами фрактальна модель розподілу струму і розрахунок поля при визначених значеннях скейлінгового показника α дає результати, що цілком узгоджуються з даними експерименту, наведеними в [7] для величин струмів, що відповідно дорівнюють 1 и 10 А.

Висновки. Інваріантне визначення диферінтегралів дельта-функції Дірака $\delta^{\alpha}(P)$ узагальнює зв'язок між густиною фрактального розподілу заряду(струму) та $\alpha-$формою, що використано для конструювання $k+\alpha-$кратного шару на поверхні як узагальнення класичних простого та подвійного шарів.

Підтверджено фізичну ідею про розгляд у фрактальному середовищі неоднорідних включень як комбінації зв'язаних електричних і магнітних $\alpha-$полів, завдяки чому у середовищі створюється додатковий магнітодіелектричний зв'язок, а електричне (магнітне) поле, що діє на металеві включення, індукує не тільки електричну (магнітну), але й магнітну (електричну) поляризацію.

Застосовано введені $\alpha-$форми електростатичного поля для аналізу явищ поляризації та намагнічування несуцільного середовища. Для чисельного розв'язування практично важливих задач про стаціонарне магнітне поле фрактального розподілу струму за законом Кулона та формулою Біо-Савара-Лапласа для тонких реальних провідників визначено мультифрактальну міру, зв'язану з розподілом струму провідності на геометричному носієві, і доведено можливість опису такої міри засобами диферінтегрального числення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. - М.: Наука, 1966. -624 с.
2. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman.San Francisco, 1982.
3. Фракталы в физике// Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике/ Пер. с англ.; Под ред. Л.Пьетронеро, Э.Тозотти. – М.: Мир. - 1988. - 672 с.
4. Falconer K.J. The Geometry of Fractal Sets.-Cambidge: University Press, № 1985.
5. Onufriyenko V.M. Physical and Geometric Interpretation of Electromagnetic Field's α-Characteristics // Telecommunication and Radio Engineering, Vol.53. -N 4-5, 1999. - PP. 136-139.
6. Онуфрієнко В.М. Потенціали фрактальних шарів зарядів і струміву штучному середовищі// Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. - 2004. - №1(1). - С.18-21.
7. Ацюковский В.А. Общая эфиродинамика. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 280 с.

Стаття надійшла 17.12.2008 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м..н., проф. Єлізаровим О.І.