

УДК 517:946.9:536.21

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ ДИРАКА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

В. П. Ляшенко

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: conon-V@yandex.ru

Рассматриваются математические модели температурных полей бесконечной осесимметричной области, разогреваемой движущимся сосредоточенным внутренним источником тепла. Источник тепла представлен с помощью обобщенной дельта-функции Дирака. После применения преобразования Фурье–Лапласа однородная краевая задача для уравнения теплопроводности с обобщенной функцией в правой части уравнения сведена к задаче Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения. Получены аналитические решения упрощенных задач. Предложена структура алгоритма решения нелинейной задачи и блок-схема системы управления температурным полем на основе разработанного алгоритма. Проведены численные эксперименты, построено температурное распределение.

**Ключевые слова:** бесконечная осесимметричная область, краевая задача, дельта-функция Дирака, преобразование Фурье–Лапласа, температурное поле.

## ВИКОРИСТАННЯ ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЇ ДІРАКА У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ

В. П. Ляшенко

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: conon-V@yandex.ru

Розглядаються математичні моделі температурних полів нескінченної осесимметричної області, що розігрівається рухомим зосередженим внутрішнім джерелом тепла. Джерело тепла представлено за допомогою узагальненої дельта-функції Дірака. Після застосування перетворення Фур'є–Лапласа однорідна крайова задача для рівняння теплопровідності з узагальненою функцією у правій частині рівняння зведена до задачі Штурма–Лиувілля для звичайного диференціального рівняння. Отримані аналітичні розв'язки спрощених задач. Запропонована структура алгоритму розв'язку нелінійної задачі та блок-схема керування температурним полем на основі запропонованого алгоритму. Проведені чисельні експерименти та побудовані температурні розподіли.

**Ключові слова:** нескінченна осесиметрична область, рівняння теплопровідності, крайова задача, дельта-функція Дірака, перетворення Фур'є–Лапласа, температурне поле.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Во многих математических моделях, приводящих к задачам для уравнений теплопроводности и диффузии, находит широкое применение функция, введенная английским математиком Дираком и впоследствии названная его именем  $\delta$ -функция Дирака. Это обобщенная функция формально определенная как линейный функционал в пространстве дифференцируемых функций. Она не есть функция в классическом понимании так как не отвечает многим ее свойствам. С помощью  $\delta(x)$ -функции Дирака удается записать идеализированный сосредоточенный источник тепла, массы, электрического заряда, концентрации вещества в соответствующем дифференциальном уравнении [1, 2]. Такая идеализация выражения точечного источника с помощью  $\delta(x)$ -функции Дирака, которая, не обладая физически нормальными свойствами дифференцируемости в точке действия сосредоточенного источника, позволяет проводить исследования, например, температурного поля, в окрестности точки действия источника.

$\delta(x)$ -функция Дирака определяется следующим образом

$$\forall x \neq 0, \delta(x) = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1)$$

К основным свойствам  $\delta(x)$ -функции можно отнести следующие:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \forall x \in (a, b), \\ 0, & \forall x \notin (a, b) \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (3)$$

С  $\delta(x)$ -функцией тесно связана единичная функция Хевисайда  $\eta(x)$ , которая определяется как производная от функции  $\delta(x)$  [2].

Процессы термической обработки длинномерных изделий, таких как проволока, лента, профиля различной конфигурации, осуществляются путем пропускания через изделие электрического тока, действие которого сосредоточено в ограниченной зоне. Часто он подводится к изделию с помощью контактов или индуктора на участке конечной длины [3]. Математические модели таких процессов и системы управления ими могут быть построены с использованием  $\delta(x)$ -функции Дирака [2, 3]. Существующие математические модели дают возможность рассматривать температурное распределение в зоне нагрева движущейся проволоки, но не позволяют его исследовать в ее окрестности [4–7]. Во многих случаях, знание такого распределения представляет значительный научный и практический интерес.

Целью работы является построение и исследование математической модели температурного поля в

бесконечной области, с постоянно или периодически действующим, внутри области, движущимся сосредоточенным источником тепла с привлечением в математическую модель  $\delta(x)$  – функции Дирака.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.

1) Рассмотрим движущуюся со скоростью  $v(t)$  изотропную полосу, разогреваемую внутренним точечным источником тепла  $W(P, t)$ ,  $P$  – текущая координата точки. Пусть полоса имеет начальную нулевую температуру, точечный источник тепла действует вдоль прямой  $x = x_0$ , а все поверхности полосы теплоизолированы. Тогда температурное поле полосы в прямоугольных координатах  $(x, y)$  может быть представлено решением однородной краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в области  $\Omega \times t : \{0 < x < h, y < \infty, t > 0\}$ .

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T}{\partial y} =$$

$$= -W(P, t) \delta(y) \delta(x - x_0) \quad (4)$$

$$T(x, y, 0) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(h, y, t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T(x, -\infty, t)}{\partial y} = \frac{\partial T(x, \infty, t)}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Задачу (4)–(6) можно решать с помощью интегрального преобразования Фурье, предварительно избавившись от первой производной по переменной

$$u с помощью замены переменных  $T = ue^{-\frac{v(t)y}{2\lambda}}$ .$$

После замены задача (4)–(6) принимает вид

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} - \zeta u =$$

$$= -W(P, t) e^{-\frac{v(t)y}{2\lambda}} \delta(y) \delta(x - x_0) \quad (7)$$

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(h, y, t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x, -\infty, t)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, \infty, t)}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

где  $\zeta = \frac{v(t)}{4\lambda}$  – монотонная функция. Рассматри-

вая скорость движения полосы и плотность источника тепла постоянными и применяя к задаче (7)–(9) последовательно преобразование Лапласа по переменной  $t$ , а затем преобразование Фурье по переменной  $y$  [8], приходим к задаче Штурма–

Лиувилля для изображения в области  $\Omega_1 = \{0 < x < h\}$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \gamma^2 u = -\frac{1}{s} w \delta(x - x_0) \quad (10)$$

$$\frac{du(0)}{dx} = \frac{du(h)}{dx} = 0 \quad (11)$$

где  $\gamma = \beta^2 + sc\rho_n + q^2$ ,  $s, \beta$  – параметры.

Ее решение выписывается в виде

$$u = \left( w \left[ \begin{array}{l} ch\gamma(x-h-x_0) + \\ + ch\gamma(h-|x-x_0|) \end{array} \right] \right) / (2sysh\gamma h) \quad (12)$$

Обратное преобразование Фурье к решению (12) приводит к вычислению сложных интегралов. Решение, которое может быть получено после их вычисления не позволяет аналитически определять параметры управления температурным полем. Для их нахождения необходимо применять численные методы.

2) Рассмотрим температурное поле бесконечного изотропного цилиндра, разогреваемого сосредоточенным источником тепла. Для расчета температурного распределения  $T(P, t)$  предполагается, что цилиндр с постоянными теплофизическими характеристиками  $\lambda, c, \rho_n$  нагревается в зоне нагрева длиной  $\Delta l = z_2 - z_1$  источником

$$W(P, T) = W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))],$$

который движется вдоль оси  $Oz$  в положительном направлении со скоростью  $v(t)$ .

Температура на границах области равна  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} T = T_0$ . Теплообмен поверхности цилиндра с окружающей средой осуществляется по законам Ньютона и Стефана–Больцмана [8].

В начальной стадии имеет место переходной процесс нагрева, т.е. переменной является скорость и плотность источников тепла, причем температура в конце зоны нагрева должна быть постоянной. В установившемся режиме скорость движения  $v(t)$  постоянна, а плотность источников тепла  $W(r, z, t, T)$  постоянна или зависит от координат и времени.

Если нагрев цилиндра осуществляется одновитковым индуктором или электронным пучком, то в таком случае зона нагрева может быть как угодно малой. Допуская в физической модели, что  $\Delta l \rightarrow 0$ , и заменяя рассредоточенный нагрев сосредоточенным с той же суммарной мощностью, перейдем к исследованию температурного поля цилиндрической области, разогреваемой подвижным сосредоточенным источником тепла. Очевидно, что при этом его плотность  $W$  неограниченно возрастает и в пределе представляет собой дельта-функцию Дирака  $W = W(P, t, T) \delta(z - v(t))$  [2].

Действительно, когда  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $z_1(t), z_2(t) \rightarrow v(t)t$ , в пределе правую часть соотношения

$$W(P, T) = W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))]$$

можно переписать в виде

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_2} W(P, t, T) [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] = W(P, t, T) \delta(z - v(t)t), \quad (13)$$

где  $\eta(z - z_i)$  – единичная функция Хевисайда [7].

Правая часть (13) представляет собой произведение  $W(P, t, T)$  на дельта-функцию Дирака  $\delta(z - v(t)t)$ ,

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{W(P, t, T)}{z_1(t) - z_2(t)} [\eta(z - z_1(t)) - \eta(z - z_2(t))] = W(P, t, T) \delta(z - v(t)t) \quad (14)$$

Следовательно, в случае сосредоточенного нагрева плотность источников тепла равна  $W(P, t, T) = w(T) f(t)$ ,  $W(P, t, T) \delta(z - v(t)t)$ , где  $w(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$ ,

$f(t)$  – кусочно-монотонная функция, для отображения импульсного нагрева [1],  $P$  – текущая координата точки.

В таком случае температурное распределение в движущейся цилиндрической среде может быть представлено решением следующей начально-краевой задачи в области  $\Omega_2 \times t = \{0 < r < r_0, z < \infty, t > 0\}$

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -w(T) f(t) \delta(z - v(t)t) \quad (15)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (16)$$

$$\lambda \frac{\partial T(r_0, z, 0)}{\partial r} = f(t) [\alpha(T_0 - T) + \varepsilon \sigma (T_0^4 - T^4)]$$

$$\frac{\partial T(0, z, 0)}{\partial r} = 0 \quad (17)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty} T = T_0, \quad (18)$$

После усреднения по радиусу [4] задача (15)–(18) в области  $\Omega_3 \times t = \{z < \infty, t > 0\}$  принимает вид

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4} f(t) \delta(z - v(t)t) - \frac{2\alpha}{r_0} \right] u - 2\varepsilon \sigma r_0^{-1} u^4 = -\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4} f(t) \delta(z - v(t)t) - \frac{2\alpha T_0}{r_0} - 2\varepsilon \sigma r_0^{-1} T_0^4$$

$$u(z, 0) = T_0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm \infty} u(z, 0) = T_0 \quad (20)$$

В задаче (19)–(20) удобно перейти к безразмерным величинам, параметрам и критериям Био, Старка, Померанцева [8]:

$$x = \frac{z}{l}, \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \mu = \frac{l}{r_0}, W = \frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4}, v = \beta T_0,$$

$$Bi = 2\alpha l / \lambda, S = 2\varepsilon \sigma l^2 T_0^3 / (\lambda r_0), \quad (21)$$

$$Po = w l^2 / (\lambda T_0), a^2 = \lambda / (c \rho_n),$$

$$\theta_0 = 0, \psi(\tau) = \frac{l}{a^2} v \left( \frac{l}{a^2} \tau \right), \theta = \frac{u - T_0}{T_0}.$$

После подстановки (21) в уравнение (19), начальное условие и условие регулярности (20), задача (19)–(20) становится однородной в области  $\Omega_4 \times \tau = \{x < \infty, \tau > 0\}$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \{v Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) - \mu Bi\} \theta - S(1 + \theta^4) = -(1 - v) Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) - S$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, \tau) = 0, \quad (22)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, \tau) = 0, \quad (23)$$

Если потеря тепла излучением с поверхности составляют малую долю всех потерь, т.е. преобладает конвективный теплообмен, то нелинейную составляющую в уравнении (22) можно не рассматривать и перейти к рассмотрению линейной начально-краевой задачи, которая при  $S \rightarrow 0$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mu Bi \theta = -Pof(\tau) \delta(x - \psi(\tau)\tau) \quad (24)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \theta(x, \tau) = 0,$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (24) [9]. Для этого умножим дифференциальное уравнение на  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\kappa}$  и проинтегрируем по переменной  $x$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} e^{-ix\kappa} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\kappa} \theta dx - \frac{\mu Bi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{-ix\kappa} dx = -\frac{Pof(\tau)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{-ix\kappa} \delta(x - \psi(\tau)\tau) dx \quad (25)$$

После интегрирования (25) с учетом условия (23), а также соотношения

$$\bar{\theta}(\kappa, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, \tau) e^{-ix\kappa} dx$$

Получим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} + (\kappa^2 + \mu Bi)\bar{\theta} = Po \times f(\tau) e^{-\kappa x}, \quad \tau > 0$$

$$\bar{\theta}(\kappa, 0) = 0$$

Решение этой задачи выписывается в виде

$$\bar{\theta}(\kappa, \tau) = Po \times e^{-(\kappa^2 + \mu Bi)\tau} \times \int_0^\tau f(\tau) e^{(-\kappa^2(\tau) + \kappa^2 + \mu Bi)\tau} d\tau \quad (26)$$

Рассмотрим случай, когда сосредоточенный источник тепла, разогревая область, движется с постоянной скоростью  $v$ . Тогда после усреднения [4] и замены переменных  $\zeta = z - vt$  задачу (15)–(18) можно записать в виде

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + \frac{vc\rho_p}{\lambda} \frac{du}{d\zeta} + \left[ \frac{I^2 \rho_0 \beta}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \frac{2\alpha}{\lambda r_0} \right] u - \frac{2\varepsilon\sigma}{\lambda r_0} u^4 = -\frac{I^2 \rho_0}{\pi^2 r_0^4 \lambda} f(t) \delta(\zeta) - \quad (27)$$

$$-\frac{2\alpha T_0}{\lambda r_0} - \frac{2\varepsilon\sigma}{\lambda r_0} T_0^4, \quad \zeta < \infty$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} u(\zeta) = T_0 \quad (28)$$

В линейном случае, когда потери тепла излучением можно не учитывать, задача (18)–(19) упрощается и можно получить аналитическое решение задачи в виде

$$u(\zeta) = T_0 + \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_0)}{\pi^2 r_0^4 vc\rho_p (k_1 - k_2) - I^2 \rho_0 \beta} \times \begin{cases} e^{k_1 \zeta}, & \zeta \leq 0 \\ e^{k_2 \zeta}, & \zeta > 0 \end{cases} \quad (29)$$

Проведены численные эксперименты и построены графики температурных распределений для технологического процесса волочения вольфрамовой проволоки.

На рис. 1 изображено температурное поле вольфрамовой проволоки, разогреваемой подвижным точечным источником тепла.

Численный анализ показал, что характер температурного поля проволоки наиболее чувствительно изменяется с изменением таких параметров, как коэффициент теплообмена  $\alpha$ , сила тока  $I$ , скорость  $v(t)$  движения источника. Изменяя эти параметры можно контролировать и управлять температурным распределением.

Разработан алгоритм решения нелинейной задачи (27)–(28).

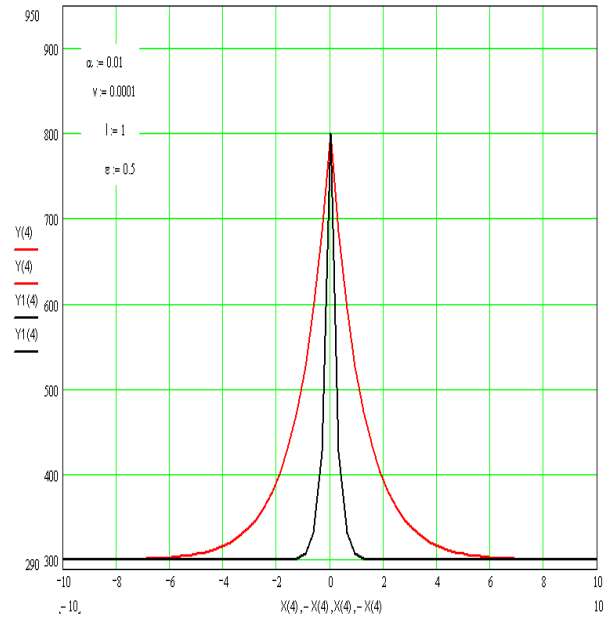


Рисунок 1 – Температурное распределение, построенное по решению (29)

Для определения параметров управления температурным полем и процессом термической обработки разработана программа. Структура программы построена за модульным принципом. Это позволило объединить решения задач для уравнений теплопроводности и, учитывая технологические особенности процессов, вести расчеты, меняя краевые условия. Для решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности применен метод переменных направлений, что позволило ограничиться одним модулем решения ленточных систем разностных уравнений второго порядка.

**ВЫВОДЫ.** Предложена математическая модель температурного поля бесконечной осесимметричной среды, разогреваемого сосредоточенным движущимся внутренним источником тепла. Источник тепла представлен с помощью дельта-функции Дирака. Путем применения интегрального преобразования Фурье–Лапласа решение однородной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности сведено к задаче Штурма–Лиувилля. Получены аналитические решения упрощенных задач.

Проведены численные эксперименты, построено температурное распределение для технологического процесса термической обработки вольфрамовой проволоки. Результаты, полученные в работе, могут быть применены при создании систем управления процессом термической обработки и при производстве проволоки и ленты из цветных и тугоплавких металлов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 216 с.
2. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.

3. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Изд. Киевского университета, 1968. – 197 с.

4. Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Запорізького національного університету. Серія «Фізико-математичні науки». – 2008. – № 1. – С. 130–135.

5. Розв'язання однієї оберненої задачі Стефана / В.П. Ляшенко, О.Б. Кобильська // Вісник Львівського університету. Серія «Прикладна математика. Інформатика». – 2009. – Вип. 15. – С. 251–257.

6. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії / В.П. Ляшенко, В.А. Ванін // Вісник НТУ «ХПІ» Математичне моделювання в тех-

ніці та технологіях. – Харків, 2010. – Вип. 68. – С. 108–113.

7. Кобыльская Е.Б., Ляшенко В.П., Григорова Т.А., Троицкий О.А. Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 4/2011 (69), част. 1. – С. 57–62.

8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

9. Уравнения математической физики / А.П. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

## USING THE DIRAC DELTA FUNCTION IN MATHEMATICAL MODELS

V. Lyashenko

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: conon-V@yandex.ru

The author has considered the mathematical models of temperature fields of infinite axially symmetric area. The area is heated by a moving concentrated internal heat source. The heat source is represented by the Dirac delta function, and thus the homogeneous boundary value problem for the heat equation is reduced to the Sturm - Liouville problem for an ordinary differential equation. It were obtained analytical solutions of simplified problems. The structure of the algorithm for solving the nonlinear problem and a block diagram of a temperature field control system based on this algorithm are proposed. The results of numerical experiments carried out and temperature distribution are represented.

**Key words:** the infinite axially symmetric area, boundary value problem, Dirac Delta function, Fourier-Laplace transform, temperature field.

## REFERENCES

1. Lizorkin, P.I. (1981), *Kurs diferencialnyh i integralnyh uravneniy s dopolnitelnymi glavami analiza* [Course of differential and integral equations with additional chapters analyze], Nauka, Moscow, Russia.

2. Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P. (1975), *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus], High School, Moscow, Russia.

3. Martynenko, V.S. (1968), *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus], Print. Kiev University, Kiev, Ukraine.

4. Lyashenko, V.P., Kobylskaya, O.B. (2008), «Mathematical model of temperature field of a moving isotropic medium», *Bulletin of Zaporizhye National University, Series "Physics and mathematics"*, no. 1, pp. 130–135, Ukraine.

5. Lyashenko, V.P., Kobylskaya, O.B. (2009), «Solved one inverse Stefan problem», *Bulletin of Lviv*

*University, Series «Applied Mathematics. Informatics»*, iss. 15, pp. 251–257, Ukraine.

6. Lyashenko, V.P., Vanin, V.A. (2010), «Problems for the heat equation in powder metallurgy», *Bulletin NTU KhPI*, no. 68, pp. 108–113, Ukraine.

7. Lyashenko, V.P. (2011), «The study of the thermal properties of the component on the wire during drawing electroplastic», *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 69, iss. 4, pp. 57–62, KрНУ, Kremenchuk, Ukraine.

8. Lykov, A.V. (1966) *Teoriya teploprovodnosti* [The theory of heat conduction.], High School, Moscow, Russia.

9. Tihonov, A.P., Samarskiy, A.A. (1972), *Uraveneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 18.04.2013.